

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 413. Band

Kuratorium:

W. Gerlach	F. Paschen	M. Planck
R. W. Pohl	A. Sommerfeld	M. Wien

Unter Mitwirkung  
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft  
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.  
M. PLANCK, Berlin

Mit 52 Abbildungen im Text



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Redaktionsschluß am 29. Oktober 1934

# Inhalt

	Seite
L. Bergmann und L. Krügel-Breslau, Messungen im Strahlungsfeld einer im Innern eines metallischen Hohlzylinders erregten Linearantenne. (Mit 18 Figuren) . . . . .	113
Fritz Brunke-Marburg/L., Untersuchungen an reinem Alpha-, Beta- und Gammamangan. (Mit 12 Figuren) . . . . .	139
Erhard Ahrens-München, Über die Temperaturabhängigkeit der wahren spezifischen Wärme des Nickels. (Mit 7 Figuren) . .	169
Konstantin Dahr-Stockholm, Beitrag zur allgemeinen Theorie der Vierpole und Kettenleiter. (Mit 11 Figuren) . . . . .	182
Konstantin Dahr-Stockholm, Über die exakten Lösungen einiger Potentialprobleme aus der Elektrotechnik bei einer speziellen Klasse von Randkurven. (Mit 4 Figuren) . . . . .	213

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechtes der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

1934 erscheinen die Bände 19–21 der 5. Folge. Bezugspreis je Band RM. 28.—, mit Porto RM. 29.20 im Inland, RM. 30.— im Ausland. Mitgliedern der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Gesellschaft für technische Physik wird ein Vorzugspreis gewährt.

Die Zeitschrift kann durch jede Buchhandlung, in Ausnahmefällen auch durch den Verlag bezogen werden.

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grünelsen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten. Die **Zeichnungen** sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

V  
2  
1

1  
9  
3  
4

XU

A

5.

ein

Unt  
ele  
ma  
ein  
zwi  
unt  
Fel  
Hie  
tris  
We  
log  
hält  
eine  
beg  
Wä  
spez  
Dar  
stell  
Inne  
mit

(Fig

[5] 9.

A



# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 21, HEFT 2, OKTOBER 1934

## *Messungen im Strahlungsfeld einer im Innern eines metallischen Hohlzylinders erregten Linearantenne*

Von L. Bergmann und L. Krügel

(Mit 18 Figuren)

### Einleitung

Vor einiger Zeit haben im Anschluß an theoretische Untersuchungen von R. Weyrich<sup>1)</sup> über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs der Erdoberfläche L. Bergmann und W. Doerfel<sup>2)</sup> experimentell das Strahlungsfeld einer in ihrer Grundschiwingung erregten Vertikalantenne zwischen zwei vollkommen leitenden horizontalen Ebenen untersucht und eine vollständige Darstellung der elektrischen Feldverteilung zwischen leitenden parallelen Ebenen gegeben. Hierbei zeigte es sich, daß auch im Resonanzfalle die elektrischen und magnetischen Feldgrößen stets einen endlichen Wert annehmen, obwohl dann das Hertz'sche Potential logarithmisch unendlich wird. Anders liegen jedoch die Verhältnisse, wenn das Strahlungsfeld einer Sendeantenne von einem unendlich langen leitenden Hohlzylinder in der Weise begrenzt wird, daß sich die Sendeantenne parallel zu den Wänden in der Achse dieses Zylinders befindet. Für diesen speziellen Fall hat ebenfalls R. Weyrich eine theoretische Darstellung des Feldes gegeben<sup>3)</sup>. Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, experimentell dieses Strahlungsfeld im Innern eines Hohlzylinders zu untersuchen und die Ergebnisse mit der Theorie von Weyrich zu vergleichen.

### Überblick über die zugrunde liegende Theorie

In einem unendlich langen Hohlzylinder mit dem Radius  $R$  (Fig. 1), dessen Wände aus unendlich gutleitendem Material

1) R. Weyrich, Ann. d. Phys. 85. S. 552. 1928; [5] 2. S. 794. 1929; [5] 9. S. 513. 1931.

2) L. Bergmann u. W. Doerfel, Ann. d. Phys. [5] 13. S. 409. 1932.

3) R. Weyrich, erscheint demnächst an anderer Stelle.

vorausgesetzt werden, befindet sich axial orientiert an der Stelle ( $z = \zeta$ ,  $r = 0$ ) die strahlende Antenne  $S$  und an einem beliebigen Raumpunkte innerhalb des Zylinders mit den Koordinaten ( $r$ ,  $z$ ) der Empfänger  $E$ . Der Strahlungsraum sei Vakuum, d. h.  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon = \mu = 1$ . Bezeichnet  $\omega$  die Kreisfrequenz der Eigenschwingung der Antenne, die zunächst als Hertzscher Dipol gedacht sei, so findet Weyrich für das Hertzsche Potential im Aufpunkt ( $r$ ,  $z$ ) den Wert:

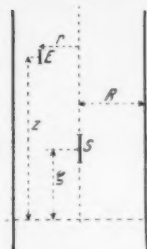


Fig. 1.  
Längsschnitt durch  
den Strahlungsraum

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} H \cdot e^{-i\omega t} &= \frac{\pi}{R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{x_{\nu}} \cdot \frac{H_0^{(1)}(k_{\nu})}{J_1(k_{\nu})} \\ &\cdot J_0\left(\frac{k_{\nu} r}{R}\right) \cdot e^{i x_{\nu} |z - \zeta| - i\omega t}. \end{aligned} \right.$$

Hierin kann man

$$(2) \quad x_{\nu} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_{\nu}^2}{R^2}} = \frac{\pi}{\lambda R} \sqrt{4R^2 - \frac{\lambda^2 k_{\nu}^2}{\pi^2}}$$

als die Wellenzahl der  $\nu$ ten Partialwelle bezeichnen.  $k_{\nu}$  sind die Nullstellen der Besselschen Zylinderfunktion I. Art, nullter Ordnung  $J_0(x)$ . Außerdem ist die Hankelsche Zylinderfunktion I. Art, nullter Ordnung  $H_0^{(1)} = J_0 + iN_0$ , wo  $N_0$  die Neumannsche Zylinderfunktion I. Art bedeutet.

Aus Gl. (1) ergeben sich die elektrischen und magnetischen Feldgrößen zu:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_{\varphi} = \operatorname{Re} \left[ -\frac{\partial H}{\partial r} \cdot e^{-i\omega t} \right]; \quad \mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_z = 0, \\ \mathfrak{E}_r &= \operatorname{Re} \left[ \frac{ic}{\omega} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial z} \cdot e^{-i\omega t} \right]; \quad \mathfrak{E}_{\varphi} = 0, \\ \mathfrak{E}_z &= \operatorname{Re} \left[ \frac{ic}{\omega} \left( \frac{\omega^2}{c^2} H + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) e^{-i\omega t} \right]. \end{aligned} \right.$$

Setzt man aus Gl. (1) den Wert für  $H$  ein, so erhält man etwa für  $z - \zeta > 0$ :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_{\varphi} &= \operatorname{Re} \left[ -\frac{\pi}{R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{x_{\nu}} \frac{H_0^{(1)}(k_{\nu})}{J_1(k_{\nu})} \cdot J_1\left(\frac{k_{\nu} r}{R}\right) e^{i x_{\nu} (z - \zeta) - i\omega t} \right], \\ \mathfrak{E}_r &= \operatorname{Re} \left[ -\frac{c\pi}{\omega R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu}^2 \frac{H_0^{(1)}(k_{\nu})}{J_1(k_{\nu})} \cdot J_1\left(\frac{k_{\nu} r}{R}\right) e^{i x_{\nu} (z - \zeta) - i\omega t} \right], \\ \mathfrak{E}_z &= \operatorname{Re} \left[ -\frac{ic\pi}{\omega R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_{\nu}^3}{x_{\nu}} \frac{H_0^{(1)}(k_{\nu})}{J_1(k_{\nu})} \cdot J_0\left(\frac{k_{\nu} r}{R}\right) e^{i x_{\nu} (z - \zeta) - i\omega t} \right]. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß sich Potential und Feldstärke in Richtung  $r$  so verhalten, als seien sie aus einzelnen stehenden Zylinderwellen zusammengesetzt, entsprechend den einzelnen Werten von  $\nu = 1, 2, \dots \infty$ . In Richtung  $z$  handelt es sich dagegen um fortschreitende Wellen. Ein Energietransport kann also nur in Richtung der Achse des Zylinders erfolgen.

Da nun die bei den späteren Messungen benützten Indikatoren (Detektor und Thermoelement) nur die zeitlichen Mittelwerte des Quadrates der Feldstärke anzeigen, sind die Ausdrücke

$$\overline{\mathcal{E}^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}^2 dt \quad \text{bzw.} \quad \overline{\mathcal{H}^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{H}^2 dt$$

für die betreffenden Feldstärkekomponenten zu bilden, wobei  $T$  die Periodendauer der Schwingung der Antenne bedeutet. Dabei ist zu beachten, daß  $\kappa_\nu$  in (2) nur bis zu einem gewissen Werte von  $\nu = n$  reell sein kann, für  $\nu > n$  aber rein imaginär ist.

Für  $\nu > n$  wird daher  $\kappa_\nu = i \eta_\nu$  gesetzt und die Summe  $\sum_{\nu=1}^{\infty}$  geteilt in  $\sum_{\nu=1}^n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}$ . Aus den Gl. (4) ergibt sich dann für  $z - \zeta > 0$ :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathcal{E}_\varphi^2} &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{R^6} \left\{ \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot J_1\left(\frac{k_\nu r}{R}\right) \cos[\kappa_\nu(z - \zeta)] \right)^2 \right. \\ &\quad + \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot J_1\left(\frac{k_\nu r}{R}\right) \cdot \sin[\kappa_\nu(z - \zeta)] \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{k_\nu^3}{\eta_\nu} \cdot \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot J_1\left(\frac{k_\nu r}{R}\right) e^{-\eta_\nu(z - \zeta)} \right)^2 \right\}, \\ \overline{\mathcal{E}_r^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{c \pi}{\omega R^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu^2 \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot J_1\left(\frac{k_\nu r}{R}\right) \right)^2, \\ \overline{\mathcal{E}_z^2} &= \frac{1}{2} \frac{c^2 \pi^2}{\omega^2 R^6} \left\{ \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu} \cdot \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot J_1\left(\frac{k_\nu r}{R}\right) \cos[\kappa_\nu(z - \zeta)] \right)^2 \right. \\ &\quad + \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot J_0\left(\frac{k_\nu r}{R}\right) \sin[\kappa_\nu(z - \zeta)] \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{k_\nu^3}{\eta_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot J_0\left(\frac{k_\nu r}{R}\right) e^{-\eta_\nu(z - \zeta)} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

In den bisherigen Gleichungen ist als Strahler ein Hertz-scher Dipol vorausgesetzt. Bei der experimentellen Untersuchung wird aber eine in ihrer Grundschiwingung erregte Abrahamsche Linearantenne verwendet. Es befinde sich die Mitte der Antenne an der Stelle  $z = \zeta = 0$ ,  $r = 0$  (Fig. 2), die Antennenenden mögen bis  $\zeta = +a$  und  $\zeta = -a$  reichen, ferner sei die Belegungsfunktion der Antenne:

$$f(\zeta) = -\frac{A}{c} \cdot \cos \frac{\omega}{c} (\zeta - a).$$

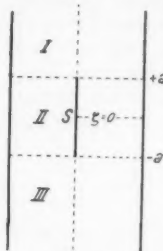


Fig. 2.  
Längsschnitt  
durch den  
Strahlungsraum

Entsprechend der Tatsache, daß die Summe in der Gl. (1) nur von  $|z - \zeta|$  abhängt, müssen bei der Berechnung des Potentials

durch die bestimmten Integrale  $\int_{-a}^{+a} \Pi f(\zeta) d\zeta$

drei Räume unterschieden werden. Raum I reicht von  $z = \infty$  bis  $z = +a$ , Raum II von  $z = +a$  bis  $z = -a$  und Raum III von  $z = -a$  bis  $z = -\infty$ . Das von der Linearantenne mit der Länge  $2a$  im Hohlraum des Zylinders erzeugte Potential läßt sich für die genannten drei Räume nach Weyrich durch folgende Gleichungen wiedergeben:

$$(1a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_{AI} &= \frac{\pi^2 A}{a c R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{\kappa_{\nu}} \frac{H_0^{(1)}(k_{\nu})}{J_1(k_{\nu})} \frac{\cos \kappa_{\nu} a}{\kappa_{\nu}^2 - \frac{\pi^2}{4a^2}} J_0\left(\frac{k_{\nu} r}{R}\right) e^{i \kappa_{\nu} z}, \\ \Pi_{AII} &= -\frac{\pi^2 A}{a c R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{\kappa_{\nu}} \frac{H_0^{(1)}(k_{\nu})}{J_1(k_{\nu})} \frac{1}{\kappa_{\nu}^2 - \frac{\pi^2}{4a^2}} J_0\left(\frac{k_{\nu} r}{R}\right) \\ &\quad \cdot \left[ e^{i \kappa_{\nu} a} \cos \kappa_{\nu} z - \frac{2 a i \kappa_{\nu}}{\pi} \cos \frac{\pi z}{2a} \right], \\ \Pi_{AIII} &= -\frac{\pi^2 A}{a c R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{\kappa_{\nu}} \frac{H_0^{(1)}(k_{\nu})}{J_1(k_{\nu})} \frac{\cos \kappa_{\nu} a}{\kappa_{\nu}^2 - \frac{\pi^2}{4a^2}} J_0\left(\frac{k_{\nu} r}{R}\right) e^{-i \kappa_{\nu} z}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus erhält man die Feldgrößen nach den in den Gl. (3) gegebenen Beziehungen. Die Gleichungen für  $\mathcal{E}_{\frac{z}{2}}$  und  $\mathcal{H}_{\frac{z}{2}}$  lauten dann:

Raum I bzw. III:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}}_i^2 = & \frac{\pi^4 A^2}{2 a^2 \omega^2 R^2} \left\{ \left[ \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot \frac{\cos \kappa_\nu a}{\kappa_\nu^2 - \frac{\pi^2}{4 a^2}} \cdot J_0 \left( \frac{k_\nu r}{R} \right) \cos \kappa_\nu z \right]^2 \right. \\ & + \left[ \pm \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot \frac{\cos \kappa_\nu a}{\kappa_\nu^2 - \frac{\pi^2}{4 a^2}} J_0 \left( \frac{k_\nu r}{R} \right) \sin \kappa_\nu z \right. \\ & \left. \left. + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{k_\nu}{\eta_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \frac{\mathfrak{Cof} \eta_\nu a}{\eta_\nu^2 + \frac{\pi^2}{4 a^2}} J_0 \left( \frac{k_\nu r}{R} \right) e^{\mp \eta_\nu z} \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}}_p^2 = & - \frac{\pi^4 A^2}{2 a^2 c^2 R^2} \left\{ \left[ \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot \frac{\cos \kappa_\nu a}{\kappa_\nu^2 - \frac{\pi^2}{4 a^2}} \cdot J_1 \left( \frac{k_\nu r}{R} \right) \cos \kappa_\nu z \right]^2 \right. \\ & + \left[ \pm \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot \frac{\cos \kappa_\nu a}{\kappa_\nu^2 - \frac{\pi^2}{4 a^2}} J_1 \left( \frac{k_\nu r}{R} \right) \sin \kappa_\nu z \right. \\ & \left. \left. + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{k_\nu^3}{\eta_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \frac{\mathfrak{Cof} \eta_\nu a}{\eta_\nu^2 + \frac{\pi^2}{4 a^2}} J_1 \left( \frac{k_\nu r}{R} \right) e^{\mp \eta_\nu z} \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Raum II:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}}_i^2 = & \frac{\pi^4 A^2}{2 a^2 \omega^2 R^4} \left\{ \left[ \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu R^2} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \frac{\cos \kappa_\nu a}{\kappa_\nu^2 - \frac{\pi^2}{4 a^2}} \cdot J_0 \left( \frac{k_\nu r}{R} \right) \cos \kappa_\nu z \right]^2 \right. \\ & + \left[ \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu}{\kappa_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \frac{1}{\kappa_\nu^2 - \frac{\pi^2}{4 a^2}} J_0 \left( \frac{k_\nu r}{R} \right) \right. \\ & \cdot \left( \frac{k_\nu^3}{R^2} \sin \kappa_\nu a \cos \kappa_\nu z - \frac{2 a \kappa_\nu}{\pi} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{4 a^2} \right) \cos \frac{\pi z}{2 a} \right) \\ & + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{k_\nu}{\eta_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \frac{1}{\eta_\nu^2 + \frac{\pi^2}{4 a^2}} \cdot J_0 \left( \frac{k_\nu r}{R} \right) \\ & \cdot \left. \left( \frac{k_\nu^3}{R^2} \cdot e^{-\eta_\nu a} \cdot \mathfrak{Cof} \eta_\nu z + \frac{2 a \eta_\nu}{\pi} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{4 a^2} \right) \cos \frac{\pi z}{2 a} \right) \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_\varphi^2 = & - \frac{\pi^4 A^2}{2 a^2 c^3 R^3} \left\{ \left[ \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu R^3} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \cdot \frac{\cos \kappa_\nu a}{\kappa_\nu^2 - \frac{\pi^2}{4a^2}} \cdot J_1\left(\frac{k_\nu r}{R}\right) \cos \kappa_\nu z \right] \right. \\
 & + \left[ \sum_{\nu=1}^n \frac{k_\nu}{\kappa_\nu} \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \frac{1}{\kappa_\nu^2 - \frac{\pi^2}{4a^2}} \cdot J_1\left(\frac{k_\nu r}{R}\right) \right. \\
 & \cdot \left( \frac{k_\nu^3}{\kappa_\nu} \sin \kappa_\nu a \cdot \cos \kappa_\nu z - \frac{2a \kappa_\nu}{\pi} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{4a^2} \right) \cos \frac{\pi z}{2a} \right) \\
 & + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{k_\nu}{\eta_\nu} \cdot \frac{N_0(k_\nu)}{J_1(k_\nu)} \frac{1}{\eta_\nu^2 + \frac{\pi^2}{4a^2}} J_1\left(\frac{k_\nu r}{R}\right) \\
 & \left. \left. \cdot \left( \frac{k_\nu^3}{R^3} e^{-\eta_\nu a} \mathfrak{E}_0[\eta_\nu z + \frac{2a \eta_\nu}{\pi} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{4a^2} \right) \cos \frac{\pi z}{2a} \right] \right)^2 \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{5a}$$

Im folgenden sollen der Übersichtlichkeit wegen nur die Gleichungen für den Fall des Hertzschen Dipols als Strahler diskutiert werden. Die Gleichungen für die Abrahamsche Linearantenne ergeben analoge Verhältnisse. In den Gl. (4) findet man in den Werten für  $\mathfrak{S}_\varphi$  und  $\mathfrak{E}_z$  in den Nennern die Größen  $\kappa_\nu$  als Faktoren, die Wellenzahlen der einzelnen Partialwellen. Aus Gl. (2) erkennt man, daß die Größe  $\kappa_\nu$  bei festem  $\lambda$  für bestimmte Werte des Zylinderradius  $R$ , die im folgenden als „kritische Radian“ bezeichnet werden sollen, Null werden, nämlich für:

$$\frac{R}{\lambda} = \frac{k_\nu}{2\pi}.$$

Nach der Theorie muß also für diese Werte von  $R/\lambda$  das Feld innerhalb des Zylinders unendlich große Werte annehmen. Setzt man für  $k_\nu$  aus untenstehender Tabelle die einzelnen Werte ein, so erhält man für ein festes  $\lambda$  eine Anzahl Radian  $R$ , für die  $\kappa_\nu = 0$  wird, also müssen  $\mathfrak{S}_\varphi$  und  $\mathfrak{E}_z$  nach den Gl. (4) unendlich groß werden. Im Zähler der genannten Gleichungen stehen nun die Werte  $J_0\left(\frac{k_\nu r}{R}\right)$  bzw.  $J_1\left(\frac{k_\nu r}{R}\right)$  als Faktoren. Am Zylinderrand, also für  $r = R$ , wird

Werte für  $k_\nu$  aus Jahnke-Emde  
Funktionentafeln

$k_1$	2,40
$k_2$	5,52
$k_3$	8,65
$k_4$	11,79

nach der Voraussetzung aber  $J_0 = 0$ , so daß wir hier die unbestimmten Werte  $0/0$  für die elektrische Feldstärke erhalten. Die mathematische Untersuchung zeigt, daß hier das Feld exakt Null werden muß. Nimmt man für die Errechnung des zweiten kritischen Radius den Wert  $k_2$ , so wird für einen bestimmten Wert von  $r$  das Argument  $\frac{k_2 \cdot r}{R} = k_1$  werden. Also wird für diesen Wert von  $r$  das Feld wieder exakt Null. Gleiches gilt auch für die Werte  $k_3, k_4 \dots$ . Für  $k_3$  ergeben sich zwischen Wand und Zylinderachse zwei derartige Stellen, bei  $k_4$  drei usw. Rechnet man die Stelle an der Wand hinzu, so erhält man stets gerade  $\nu$ -Stellen, an denen  $\mathcal{E}_3 = 0$  wird. Es bilden sich also in den kritischen Partialwellen Knotenflächen aus, die die Gestalt von konzentrischen Zylindern haben. Diese kritischen Partialwellen sind aber charakteristisch für das ganze Feld, denn bei der Berechnung ergibt sich, daß für die kritischen Radien nur diejenigen Partialwellen einen wesentlichen Anteil zum Felde liefern, für die  $\alpha_\nu = 0$  ist, während alle andern Partialwellen sehr kleine Beträge liefern.

Das bisher besprochene Verhalten zeigen, wie bereits erwähnt, nur die  $\mathcal{E}_3$ - und  $\mathcal{H}_\varphi$ -Komponenten des Feldes. Es bleibt noch die  $\mathcal{E}_r$ -Komponente des Feldes zu besprechen. Aus Gl. (4) ist zu ersehen, daß  $\alpha_\nu$  im Nenner fehlt, so daß niemals auch bei kritischen Radien ( $\alpha_\nu = 0$ ) eine Resonanz eintreten kann. Auch die numerische Rechnung zeigt, daß  $\mathcal{E}_r^2$  sehr klein ist. Experimentell war es nicht möglich  $\mathcal{E}_r^2$  zu messen. Aus diesem Grunde sind in den Gl. (5a) die Größen für  $\mathcal{E}_r^2$  nicht eingetragen.

Über die Abhängigkeit von  $\mathcal{E}_3$  und  $\mathcal{H}_\varphi$  von  $z$  geben in gleicher Weise wie über die von  $r$  die Gl. (4) Auskunft. Im allgemeinen Falle ist diese Abhängigkeit hier wie dort ziemlich verwickelt. Beschränkt man sich aber auf den Fall der Resonanz, in dem die kritische Partialwelle so dominierend ist, daß sie allein für das Feld ausschlaggebend ist, so gelangt man zu einer wesentlich einfacheren Aussage: Wegen  $\alpha_\nu = 0$  beim kritischen Radius ist bei konstantem  $r$  und variablen  $z$   $\mathcal{E}_3^2$  und  $\mathcal{H}_\varphi^2$  konstant.

### Beschreibung der Apparatur

#### 1. Sender

In der Theorie werden unendlich lange Zylinder vorausgesetzt, was praktisch unmöglich zu verwirklichen ist. Immer-



hin ist es notwendig, Zylinder zu wählen, deren Länge groß gegen die benutzte Wellenlänge ist. Da die Messungen in örtlich begrenzten Räumen vorgenommen werden mußten, kamen als Strahler nur solche mit einer möglichst kleinen Wellenlänge in Betracht; es mußte ferner eine gute Konstanz der Senderschwingung gefordert werden. Es wurden deshalb ungedämpfte Wellen von 14, 33 und 52 cm Wellenlänge benutzt, die mittels Elektronenröhren erzeugt wurden. Die Wellen mit 14 und 33 cm Wellenlänge wurden mit Röhren der Firma TKD., Nürnberg erzeugt. Diese waren nach Angaben von Kohl<sup>1)</sup> gebaut und arbeiten in der sogenannten Bremsfeldschaltung. Die elektrischen Daten für die Röhre zur Erzeugung der 14 cm-Wellenlänge waren folgende: Heizstrom 1,9 Amp., Gitterspannung + 200 Volt, Anodenspannung - 12,5 Volt. Die Heizung erfolgte aus einer Akkumulatorenbatterie, die Gitter- und Anodenspannung wurden über eine Potentiometeranordnung aus dem 220-Volt-Gleichstromnetz entnommen. Zur Unterdrückung der stets vorhandenen Netzschwankungen wurden mit gutem Erfolg in die Potentiometerzuleitungen Eisenwasserstoffwiderstände geeigneter Dimensionierung eingebaut.

Die Röhre zur Erzeugung einer Welle von 33 cm Wellenlänge war die gleiche, wie sie früher Bergmann und Doerfel<sup>2)</sup> benutzten. Die Betriebsdaten waren: Heizstrom 2,1 Amp., Gitterspannung + 380 Volt, Anodenspannung 0 Volt.

Zur Herstellung der 52 cm-Wellenlänge diente eine Telefunken-Kurzwellenröhre Type RS 296, die in der normalen Barkhausenkurzschaltung arbeitet. Ihre Betriebsdaten waren: Heizstrom 6,4 Amp., Gitterspannung + 400 Volt, Anodenspannung - 50 Volt. Die Schwingungsleistung betrug etwa 4,5 Watt im Gegensatz zu den anderen Röhren, die nur Bruchteile eines Watt lieferten.

Da es sich bei den Vorversuchen herausstellte, daß die Röhren selbst stark strahlten, und infolgedessen das Strahlungsfeld einer an die Röhren direkt angekoppelten Linearantenne unsymmetrisch war, wurde die Schwingungsenergie von den Röhren auf ein Lechersystem übertragen, an dessen anderem Ende die Linearantenne angebracht wurde. Zu diesem Zwecke wurde ein Metallrohr mit darin zentrisch gelagertem Draht als Energieleitung benutzt (Fig. 3a). Eine Verlängerung des zentrischen Drahtes bildete die eigentliche Antenne. Um eine Abstimmung dieses Systems auf die Wellenlänge des Senders

1) K. Kohl, *Ann. d. Phys.* **85**, S. 1. 1928.

2) L. Bergmann u. W. Doerfel, *Ann. d. Phys.* **13**, S. 413. 1932.



zu ermöglichen, bestand das äußere Rohr aus zwei ineinander gleitenden Messingzylindern, während der Innendraht in einem passenden Messingrohr lief, so daß die Länge beliebig verändert werden konnte. Dieses System wurde zunächst von oben axial in die Zylinder eingeführt. Dabei stellte es sich aber heraus, daß das Rohrsystem das Feld im oberen Zylinderraum störte. Die Anordnung wurde daher dahingehend abgeändert, daß die Antenne um  $90^\circ$  herumgebogen wurde (Fig. 3b) und das Lechersystem jetzt seitlich durch ein Loch in der Zylinderwand in den Innenraum des Hohlzylinders eingeführt wurde.

Teilweise wurde auch einfaches in seiner Länge veränderliches Paralleldrahtsystem benutzt, an dessen Ende nach Angaben von Hollmann<sup>1)</sup> ein kleiner Plattenkondensator mit daran angeschraubten Antennenstäbchen angebracht war (Fig. 3c). Dieser Strahler wurde ebenfalls durch ein Loch in der Zylinderwand in den Innenraum des Zylinders eingeführt.

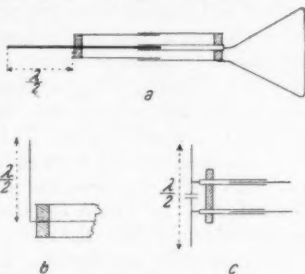


Fig. 3. Sendeantenne mit Energiezuleitung

## 2. Empfänger

Das Feld wurde bei der 14 und 33 cm-Welle mittels Kristalldetektor ausgemessen, während bei der 52 cm-Welle mit Thermoelement als Empfangsindikator gearbeitet wurde.

Der Kristalldetektor war folgendermaßen gebaut (Fig. 4) ein etwa 20 mm langes Hartgummiröhrchen *H* wurde an seinen beiden Enden durch aufgeschraubte Metallkappen *M* verschlossen. Die eine Kappe trug auf der Innenseite den Kristall *K*, während durch die andere eine von außen drehbare Schraube *S* hindurchging, die den Bronzedraht *B* trug. Von außen waren in die Metallkappen die Antennenstäbe *A* eingeschraubt. Der Anschluß des Galvanometers an den Enden des Detektors erfolgte mittels verdrehter Litze über zwei kleine Drosselspulen *D*, die ein Abfließen der Hochfrequenz über die

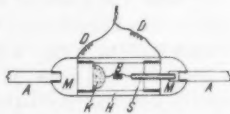


Fig. 4. Schnitt durch den Detektor

1) H. E. Hollmann, Funktechnische Monatshefte 1932. S. 347.

Litze verhindern sollten. Zur Vermeidung der Störung des Feldes durch die Litze wurde diese stets senkrecht von der Mitte des Empfängers in einem Glasrohr weggeführt, das gleichzeitig den Empfänger trug. Das Glasrohr wurde durch einen Schlitz in den Zylinderraum eingeführt und war außen an einem Holzgestell befestigt, an dem die Größe der Verschiebung in Richtung  $r$  und  $z$  abgelesen werden konnte. Als Anzeiginstrument wurde entweder ein Zeigergalvanometer von Hartmann & Braun (Empfindlichkeit  $3 \cdot 10^{-7}$  Amp. pro Skt.) oder ein Zeigerinstrument mit Bandaufhängung von Siemens & Halske (Empfindlichkeit  $5 \cdot 10^{-9}$  Amp. bei 1 mm Ausschlag in 1 m Skalenabstand) verwandt. Das bei den Messungen mit der 52 cm-Welle benützte Thermoelement (Eisen-Konstantan) befand sich in einem evakuierten Glasgefäß mit seitlich eingeschmolzenen Metallstäbchen, auf die sich die eigentlichen Antennenstäbe aufstecken ließen. Das Thermoelement war mit einem Weston-Spiegelgalvanometer (Empfindlichkeit  $8,5 \cdot 10^{-8}$  Amp. bei 1 mm Ausschlag in 1 m Skalenabstand) verbunden.

Die magnetische Komponente des Feldes konnte wegen der größeren Sendeleistung nur bei der 52 cm-Welle gemessen werden. Es wurden zu diesem Zwecke in den oben beschriebenen Detektor statt der geraden Antennenstäbchen halbkreisförmig gebogene eingeschraubt; es entstand so ein kreisförmiger Empfänger, der bei richtiger Orientierung nur auf die magnetische Feldstärkekomponente ansprach.

### 3. Die Zylinder

Zur Herstellung der Zylinder für die 14 und 33 cm-Welle wurde Zinkblech von 0,7 mm Stärke verwandt. Die Zylinder waren 75 cm lang, rund gewalzt und nicht vollkommen geschlossen, sondern besaßen einen 1 bis 1,5 cm breiten Längsspalt, der zur Einführung und Verschiebung des Empfängers diente. Die hierbei nicht benutzten Spaltteile konnten abgedeckt werden. Für den Zylinder, in dem Messungen mit der 52 cm-Welle angestellt wurden, wurde 1,8 mm starkes Zinkblech benutzt. Die Länge dieses Zylinders betrug 1,5 m<sup>1)</sup>. Geeignete Holzgestelle sorgten dafür, daß ein Verbiegen der Zylinder praktisch unmöglich war.

1) Der Schlesischen Bergwerk-Hütten-A.-G. Beuthen O.-S. sind wir für die kostenlose Überlassung des Zinkblechs für die Zylinder zu großem Dank verpflichtet.

### Vorversuche

Ehe an die exakte Ausmessung des Strahlungsfeldes innerhalb der Zylinder herangegangen werden konnte, waren einige Vorversuche notwendig, die unter anderem auch Aufschluß darüber geben sollten, inwieweit die in der Theorie gemachten Voraussetzungen erfüllt waren. So war zur Errechnung der kritischen Radien die genaue Kenntnis der benutzten Wellenlängen nötig. Es wurden zu diesem Zwecke vor einer Metallwand die stehenden Wellen der drei benutzten Sender ausgemessen. Es ergaben sich für die Wellenlängen Werte:  $\lambda_1 = 14,0$ ,  $\lambda_2 = 33,1$  und  $\lambda_3 = 52,5$  cm.

Ferner wurde untersucht, ob die von der Theorie geforderte Symmetrie des Strahlungsfeldes um die Sendeantenne herum bestand. Zu diesem Zwecke wurde in mehreren Zylindern der Empfänger auf verschiedenen, jeweils in einer Ebene liegenden Zylinderdurchmessern von Wand zu Wand verschoben. Es wurde — abgesehen von kleinen Abweichungen in nächster Nähe des Schlitzes — eine gute Symmetrie des Feldes um die Zylinderachse festgestellt. In den später folgenden graphischen Darstellungen ist daher stets nur die Verteilung von  $\mathcal{E}_x^2$  bzw.  $\mathcal{H}_y^2$  längs eines Zylinderradius von der Zylinderachse bis zur Zylinderwand wiedergegeben. Die Vorversuche zeigten ferner, daß eine störungsfreie Ausmessung des Feldes im Innenraum der Zylinder nur mit stark aperiodischer Empfangsantenne möglich war; es wurde daher bei sämtlichen Messungen darauf geachtet, daß die Länge der Empfangsantenne wesentlich kleiner als  $\lambda/2$  war. Bei den Vorversuchen stellte sich dann noch heraus, daß die zunächst aus Symmetriegründen gewählte axiale Einführung der Energiezuleitung zur Sendeantenne nach Fig. 3a ungeeignet war. Die elektrische Feldstärke und zwar die  $\mathcal{E}_x$ -Komponente erreicht gerade in der Zylinderachse maximale Werte. Liegt nun die Energiezuleitung in der Zylinderachse, so stört sie die Feldverteilung erheblich. Es wurde deshalb bei den eigentlichen Messungen die Energiezuleitung entsprechend Fig. 3b senkrecht zur Zylinderachse in Richtung eines Zylinderradius eingeführt.

Einige Schwierigkeiten machte die genaue Einstellung der Metallzylinder auf die Werte der kritischen Radien. Diese Einstellung war außerordentlich scharf. Experimentell wurde sie so vorgenommen, daß an dem Längsschlitz des Zylinders mehrere sich gegenüberstehende Metallwinkel angebracht waren, die jeweils eine Schraubenspindel miteinander verband. Durch Drehen dieser Schrauben konnte der Längsschlitz des Zylinders

schmäler bzw. breiter gemacht und damit der Zylinderdurchmesser in gewissen Grenzen stetig verändert werden. Diese Veränderung des Zylinderdurchmessers wurde so lange vorgenommen, bis der in der Achse des Zylinders befindliche Empfänger ein Maximum der elektrischen Feldstärke, also den gewünschten Resonanzzustand anzeigte. In der Fig. 5 ist eine in dieser Weise aufgenommene „Resonanzkurve“ wiedergegeben. Als Abszisse ist der Radius  $R$  des Zylinders, als Ordinate der Wert  $\mathcal{E}_0^2$  aufgetragen. Für den Resonanzfall wurde dann der Zylinderumfang ermittelt und daraus rückwärts der kritische Radius bestimmt.

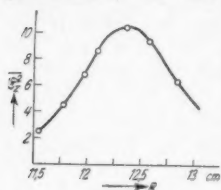


Fig. 5.  $\mathcal{E}_0^2$  als Funktion von  $R$

#### Messungen und Ergebnisse

##### 1. 14,0 cm-Welle

**Kritische Radien.** Für die kürzeste Wellenlänge von  $\lambda = 14,0$  cm lieferte die aus Gl. (2) für  $\alpha_r = 0$  folgende Beziehung  $R = \frac{k_r c}{\omega} = \frac{k_r \lambda}{2\pi}$  für die drei ersten Nullstellen  $k_r$  der Besselschen Funktion die Werte:

$$R_1 = 5,347 \text{ cm,}$$

$$R_2 = 12,321 \text{ cm,}$$

$$R_3 = 19,274 \text{ cm}$$

für die kritischen Radien.

Die Fig. 6 gibt einige der Messungen im Zylinder mit dem ersten kritischen Radius  $R = 5,3$  cm wieder. Der ganze Zylinder war 75 cm lang und die Mitte der Sendeantenne befand sich 18 cm vom oberen Ende entfernt. Gemessen wurde das Feld im Zylinderraum unter der Antenne. Die in den Figg. 6a–c dargestellten Kurven beziehen sich auf Messungen der  $\mathcal{E}_0$ -Komponente der elektrischen Feldstärke in den drei Ebenen  $z = 0$  (Äquatorebene der Sendeantenne),  $z = -5$  und  $z = -10$  cm. Als Ordinate ist  $\mathcal{E}_0^2$  in willkürlichen Einheiten aufgetragen, als Abszisse die Entfernung  $r$  des Aufpunktes von der Zylinderachse. Die ausgezogenen Kurven stellen die theoretisch berechneten Feldwerte dar; sie wurden im Punkte  $r = 2$  cm an die experimentellen Werte angeglichen. Aus den Messungen folgt, daß die  $\mathcal{E}_0$ -Komponente der elektrischen Feldstärke von der Zylinderachse stetig nach den Zylinderwänden abfällt und an der Zylinderwand den Wert 0 erreicht, wie das ja auch nach den Maxwell'schen Grenzbedingungen dort der Fall sein muß. Theoretisch soll zwar

für den Fall des kritischen Radius eine elektromagnetische Resonanz des Zylinderraumes eintreten und  $\mathcal{E}_z$  überall im Idealfall unendlich werden. Praktisch tritt dieser Fall natürlich infolge von Energieverlusten insbesondere durch Abstrahlung bei den Zylindern von endlicher Länge nicht ein. Die berechneten Kurven für  $\mathcal{E}_z^2$  in Abhängigkeit von  $r$  wurden erhalten, wenn unter Zugrundelegung der Welle

$$\lambda = 14,0 \text{ cm}$$

mit einem Zylinderradius

$$R = 5,3 \text{ cm}$$

gerechnet wurde. In diesem Fall wird  $\mathcal{E}_z^2$  nirgends unendlich und die Feldverteilung stimmt recht gut mit den Messungen überein.

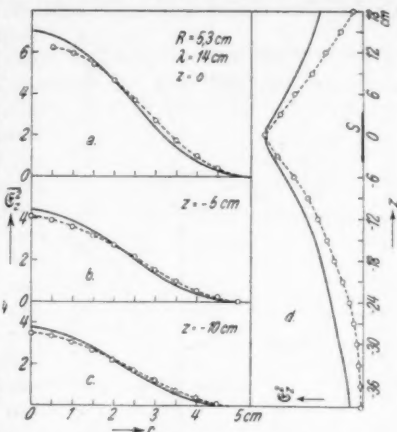


Fig. 6.  $\mathcal{E}_z^2$  als Funktion von  $r$  und  $z$  im Fall des ersten kritischen Radius bei  $\lambda = 14 \text{ cm}$

Die Fig. 6d zeigt ferner den Verlauf der elektrischen Feldstärkekomponente  $\mathcal{E}_z$  in Richtung der Zylinderachse; die gestrichelte Kurve gibt die gemessenen, die ausgezogene die berechneten Werte für  $\mathcal{E}_z^2$  wieder. Man erkennt, daß die elektrische Feldstärke im Zylinderraum nach beiden Seiten von der strahlenden Antenne erheblich schneller abfällt als es die Theorie verlangt. Daß dieser Abfall ebenfalls durch die endliche Länge des Zylinders bedingt ist, geht z. B. daraus hervor, daß die elektrische Feldstärke nach oben schneller abnimmt als nach unten, da sich der Sender vom oberen Rand des Zylinders nur 18 cm gegenüber 57 cm vom unteren Ende entfernt befand. In Fig. 6d, sowie in den späteren analogen Figuren ist die Lage und ungefähre Länge der Sendeantenne  $S$  mit eingezeichnet.

Der zweite kritische Radius wurde experimentell zu  $R = 12,35 \text{ cm}$  bestimmt. Die Figg. 7a—c zeigen den Verlauf von  $\mathcal{E}_z^2$  in Abhängigkeit von  $r$ . Gemessen ist die gestrichelte Kurve in Fig. 7a in der Ebene des Senders, also  $z = 0$ , in Fig. 7b in  $z = -10$  und in Fig. 7c in  $z = -18 \text{ cm}$ . Es sind nur Kurven von Messungen unterhalb der Sendeantenne

gezeichnet, da der Verlauf des Feldes oberhalb der Sendeanenne der gleiche war. In der Äquatorebene des Senders fällt die Feldstärke gegen die Zylindermitte noch etwas ab. Es ist dies sicher auf eine restliche Rückwirkung zwischen

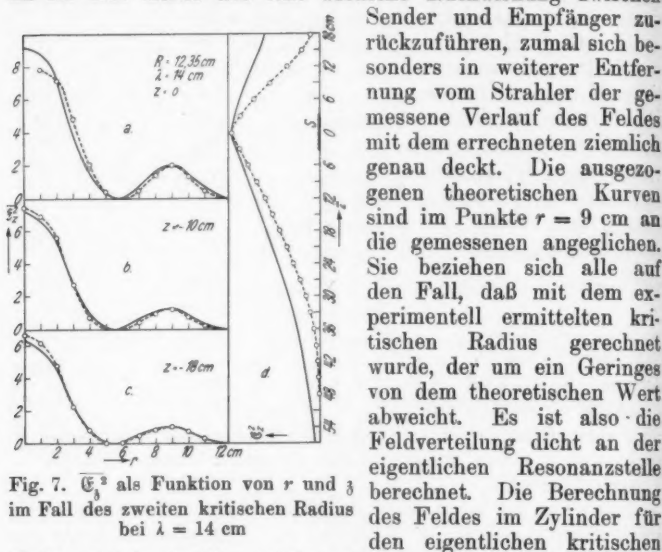


Fig. 7.  $E_z^2$  als Funktion von  $r$  und  $z$  im Fall des zweiten kritischen Radius bei  $\lambda = 14$  cm

Radius ist ja insofern nicht möglich, da das kritische Glied in der Reihe der Partialwellen, deren Summe die elektrische bzw. magnetische Feldstärke ergibt, wegen des Nullwerdens des Nenners ( $x_2 = 0$ ) unendlich wird.

Aus diesen Messungen im Falle des zweiten kritischen Radius folgt, daß die  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes von der Zylinderachse stetig bis zur Stelle  $r = 5,6$  cm abfällt, wo die Theorie eine Nullstelle fordert, die die Messung auch gut wiedergibt. Von hier aus steigt die Feldstärke an, um am Punkte  $r = 9,1$  cm ein Maximum zu erreichen, und fällt dann bis zur Zylinderwand wieder auf Null ab. Die elektrische Feldstärke nimmt also in der Zylinderachse und in einer weiteren ringförmigen Zone maximale Werte an, während dazwischen und an der Wand selbst ringförmige Zonen liegen, wo das elektrische Feld Null ist.

Den Verlauf von  $E_z^2$  in Richtung der Zylinderachse gibt die Fig. 7d wieder. Die gestrichelte Kurve zeigt die an der Stelle  $r = 3$  cm in der  $z$ -Richtung vorgenommenen Messungen.



Die ausgezogene Kurve stellt die theoretisch berechneten Werte für diesen Fall dar. Es zeigte sich wieder, daß infolge der endlichen Zylinderlänge die gemessenen Feldwerte stärker nach den Zylinderenden zu abfallen, als es nach der Theorie zu erwarten ist.

Der nächst höhere dritte kritische Radius für die Welle  $\lambda = 14,0$  cm wurde experimentell zu  $R = 19,3$  cm ermittelt.

Fig. 8a und b zeigen in den gestrichelten Kurven Ergebnisse von einigen Messungen in diesem Zylinder und den theoretischen Verlauf (ausgezogene Kurven) des elektrischen Feldes in Abhängigkeit von  $r$ . Die Kurven beziehen sich auf Messungen in der Äquatorebene des Senders  $z = 0$  und in der Ebene  $z = -7$ , und zwar wurde bei der graphischen Darstellung die errechnete Kurve für Fig. 8a im Punkte  $r = 10$  cm, für Fig. 8b im Punkte  $r = 0$  cm an die experimentelle angeglichen.

Die  $E_z$ -Komponente der elektrischen Feldstärke fällt hier also von der Zylinderachse nach dem Rande zu ab und erreicht zweimal an den Stellen  $r = 5,5$  cm und  $r = 13,0$  cm den Wert Null. Dieser von der Theorie verlangte Feldverlauf wird durch die Messungen gut wiedergegeben. Auch bei diesem dritten kritischen Radius war die Einstellung des Zylinderdurchmessers auf die Welle der Sendeantenne sehr scharf.

Für den Verlauf der  $E_z$ -Komponente in Richtung der Zylinderachse ergaben die Messungen ein ähnliches Bild, wie im Falle des oben besprochenen ersten und zweiten kritischen Radius, so daß sich eine graphische Wiedergabe dieser Messungen hier erübrigt.

Überblickt man die Messungen in den Zylindern mit den kritischen Radien für die Wellenlänge  $\lambda = 14,0$  cm, so fällt auf, daß die experimentell als kritisch ermittelten Radien von den errechneten etwas abweichen. Diese Abweichung liegt

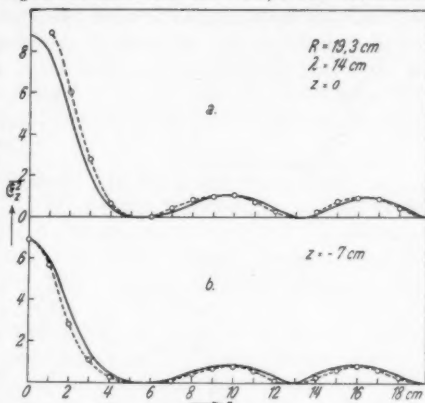


Fig. 8.  $E_z^2$  als Funktion von  $r$  im Fall des dritten kritischen Radius bei  $\lambda = 14$  cm

aber innerhalb der Meßgenauigkeit bei der Messung der Radien und Wellenlängen. Errechnet man z. B. rückwärts aus den experimentell ermittelten Radien die Wellenlänge, so weicht diese nur in der zweiten Dezimale von der gemessenen ab. Für die theoretische Berechnung der  $\mathcal{E}_z$ -Werte wurden stets die gemessenen Werte von  $R$  benutzt.

**Nichtkritische Radien.** Die Einstellung der kritischen Radien  $R$  auf die Welle des Senders hatte bei den Vorversuchen ge-

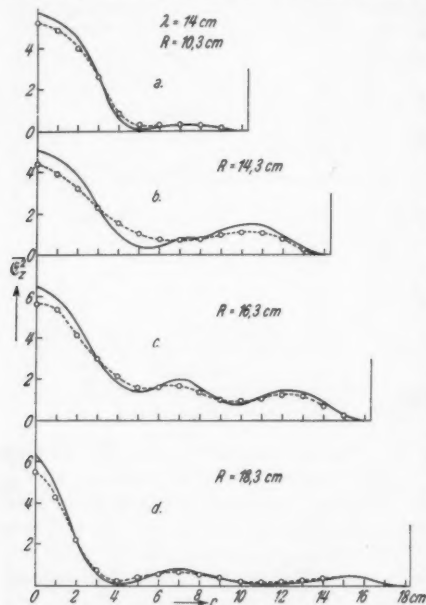


Fig. 9.  $\mathcal{E}_z^2$  als Funktion von  $r$  für den Fall nichtkritischer Radien bei  $\lambda = 14$  cm

ihrem wesentlichen Verlauf gut übereinstimmen, zeigen, daß bei den kritischen Radien keine Nullstellen des elektrischen Feldes im Zylinder auftreten, mit Ausnahme der Stelle direkt an der Zylinderwand. In Fig. 9a, die sich auf eine Messung im Zylinder mit dem Radius  $R = 10,3$  cm bezieht, der also zwischen dem ersten und zweiten kritischen Radius liegt, ist ohne weiteres zu erkennen, daß sich die zweite Partialwelle bereits sehr stark bemerkbar macht. Während nämlich bei  $R = 5,3$  cm das

zeigt, daß eine kleine Änderung von  $R$  den Verlauf der  $\mathcal{E}_z$ -Komponente des elektrischen Feldes in Richtung  $r$  wesentlich ändert. Es lag nun nahe, zu untersuchen, wie sich das elektrische Feld bei beliebigen Radien verhält. Es wurden daher noch Feldmessungen bei den nichtkritischen Radien  $R = 10,3$  cm;  $14,3$  cm;  $16,3$  cm und  $18,3$  cm vorgenommen. Die gemessenen und errechneten Kurven sind in den Figg. 9a–d wiedergegeben. Die Messungen wurden in der Ebene  $z = -6$  cm vorgenommen. Sowohl die Messungen als auch die theoretisch berechneten Kurven, die in



elektrische Feld von der Achse zum Rande des Zylinders stetig abfällt, tritt hier von  $r = 5$  cm bis  $r = 8$  cm bereits wieder ein leichtes Ansteigen des elektrischen Feldes auf. Die Figg. 9b—d zeigen Feldmessungen in Zylindern, deren Radien zwischen dem zweiten und dritten kritischen Radius liegen. Auch hier sieht man, wie die dritte Partialwelle immer größere Werte liefert, je mehr sich der Radius dem dritten kritischen nähert. So zeigt Fig. 9d für  $R = 18,3$  cm bereits große Ähnlichkeit mit der Kurve für den kritischen Radius  $R = 19,3$  cm (Fig. 8) mit Ausnahme der Stellen  $r = 4$  cm und  $r = 12$  cm, an denen hier bestimmt meßbare elektrische Feldstärken vorhanden sind, während bei  $R = 19,3$  cm an diesen Stellen  $\bar{E}_3^z$  Null wird.

Bezüglich des Verlaufs von  $\bar{E}_3$  in Richtung längs der Zylinderachse ergaben die Messungen bei nichtkritischen Radien das Resultat, daß die  $\bar{E}_3$ -Komponente von der Äquatorebene der Sendeantenne nach den beiden Zylinderenden wesentlich stärker abfällt, als im Falle eines kritischen Radius. Auch dies steht mit der Theorie im Einklang. Diese fordert, daß bei unendlich langen Zylindern, d. h. bei Vermeidung jeglicher Energieabstrahlung und sonstiger Verluste, nur im Falle der kritischen Radien die  $\bar{E}_3$ -Komponente der elektrischen Feldstärke längs der  $z$ -Richtung konstant bleibt, da wegen  $\kappa_z = 0$  der Ausdruck  $e^{-\kappa_z |z - \zeta|}$ , der in den Gl. (4) auf S. 114 für die Veränderung von  $\bar{E}_3$  mit  $z$  maßgebend ist, den Wert 1 annimmt. In allen anderen Fällen ( $\kappa_z \neq 0$ ) nimmt  $\bar{E}_3$  mit zunehmendem  $z$  ab.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das elektrische Feld in den Zylindern mit nichtkritischen Radien wesentlich kleinere Werte annimmt, als für den Fall, wo der Radius einen kritischen Wert besitzt. Leider ist ein direkter Vergleich der Meßwerte aus den Kurven in Fig. 9 für die nichtkritischen Radien und den Meßwerten in Fig. 8 für die kritischen Radien nicht möglich, da bei diesen Messungen die Detektorempfindlichkeit sich von Messung zu Messung verändert. Es war nicht möglich, alle Messungen mit gleichmäßig empfindlichem Detektor vorzunehmen. Im allgemeinen waren bei einigermaßen gleichempfindlichem Detektor bei dem nichtkritischen Zylinderradius ( $R = 16,3$ ), der ungefähr in der Mitte zwischen dem zweiten und dritten kritischen Radius liegt, die Ausschläge des Galvanometers  $1/4$ , so groß wie bei den kritischen Radien, d. h. die elektrische Feldstärke betrug nur etwa  $1/16$  gegenüber dem Resonanzfall im Zylinder mit kritischem Radius.

## 2. 33,1 und 52,5 cm-Welle.

**Kritische Radien.** Einige Messungen wurden noch mit den längeren Wellen  $\lambda = 33,1$  und  $\lambda = 52,5$  cm ausgeführt. Für diese Wellen ergaben sich rechnerisch als kritische Radien die Werte:

$$R_1 = 12,61 \text{ bzw. } = 20,6 \text{ cm,}$$

$$R_2 = 29,0 \quad \text{,,} \quad = 46,16 \text{ cm.}$$

Es nehmen also die Zylinder recht erhebliche Dimensionen an, wenn man berücksichtigt, daß die Länge der Zylinder wenigstens einige Wellenlängen betragen soll. Es wurde daher mit der 33,1 cm-Welle nur ein Zylinder mit dem ersten kritischen Radius und mit der 52,5 cm-Welle ein Zylinder mit dem zweiten kritischen Radius durchgemessen.

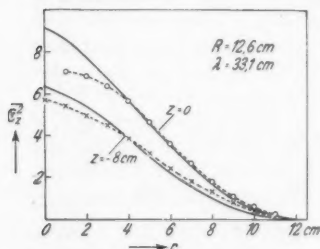


Fig. 10.  $\bar{E}_\lambda^2$  als Funktion von  $r$  im Fall des ersten kritischen Radius bei  $\lambda = 33,1$  cm

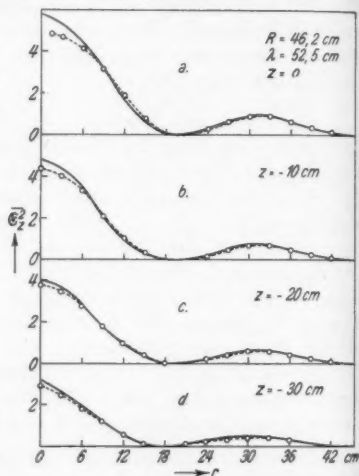


Fig. 11.  $\bar{E}_\lambda^2$  als Funktion von  $r$  im Fall des zweiten kritischen Radius bei  $\lambda = 52,5$  cm

Die Meßresultate für die 33,1 cm-Welle sind in Fig. 10 in den gestrichelten Kurven wiedergegeben. Die ausgezeichneten Kurven stellen den theoretisch errechneten Verlauf von  $\bar{E}_\lambda^2$  in Abhängigkeit von  $r$  dar, die oberen Kurven beziehen sich auf das Feld in der Äquatorebene der Sendeantenne, die unteren Kurven auf Messungen in der Ebene  $z = -8$  cm. Im übrigen war der Abfall der elektrischen Feldstärke in Richtung der Zylinderachse genau so wie bei der 14,1 cm-Welle.

In der Fig. 11 sind schließlich die Messungen in dem größten benutzten Zylinder unter Verwendung der 52,5 cm-Welle für den Fall des zweiten kritischen Radius dargestellt. Es sind Meßwerte für vier verschiedene Ebenen  $z = 0, z = -10,$

$z = -20$ ,  $z = -30$  cm wiedergegeben. Die ganze Länge des Zylinders betrug 150 cm, also etwa 3 Wellenlängen. Bei den Messungen war die Mitte der Sendeantenne 35 cm vom einen Zylinderende entfernt. Der Zylinder befand sich bei den Messungen in horizontaler Lage, so daß Störungen vom Boden bzw. der Decke des Raumes nicht in Frage kamen. Die Messungen konnten mit besonderer Genauigkeit durchgeführt werden, da die Leistung des Senders so groß war, daß als Indikator am Empfänger ein Thermoelement benutzt werden konnte. Es stimmen daher auch die gemessenen Feldwerte mit den errechneten Werten sehr gut überein.

Die verhältnismäßig große Feldenergie im Zylinderraum ermöglichte ferner noch die Messung des Verlaufs der magnetischen Feldstärke in Richtung  $r$ , was leider bei den anderen

Wellen wegen der zu geringen Sendeenergie nicht gelang. Die beiden Kurven in Fig. 12 zeigen das Ergebnis in den Ebenen  $z = -5$  und  $z = -25$  cm. Als Ordinate ist  $\bar{\mathfrak{H}}_\varphi^2$  in willkürlichen Einheiten aufgetragen. Die ausgezogene Kurve ist errechnet. Zum Vergleich ist nochmals der Verlauf von  $\bar{\mathfrak{E}}_z^2$  in der strich-punktierten Kurve eingetragen. Das magnetische Feld ist in der Zylinderachse Null, erreicht bei  $r = 15$  cm ein Maximum, wird bei  $r = 30,3$  cm wieder Null und nimmt dann nach der Zylinderwand wieder zu. Man erkennt aber, daß Minimum bzw. Maximum des magnetischen Feldes mit dem Maximum bzw. Minimum des elektrischen Feldes nicht zusammenfallen; letzteres ist auch selbstverständlich, da wir es hier in Richtung  $r$  mit stehenden Zylinderwellen zu tun haben. Daß bei den Messungen von  $\bar{\mathfrak{H}}_\varphi^2$  die experimentell ermittelten Kurven an den Nullstellen nicht exakt den Wert Null ergeben, liegt daran, daß der auf  $\bar{\mathfrak{H}}_\varphi^2$  ansprechende kreisförmige Empfänger wegen seiner endlichen Größe auch noch auf  $\bar{\mathfrak{E}}_z^2$  anspricht, falls der Verlauf von  $\bar{\mathfrak{E}}_z$  zu beiden Seiten der magnetischen Nullstelle unsymmetrisch ist. Es geht dies aus der Messung am Punkte  $z = -25$  cm rund  $r = 0$  cm hervor, wo zu beiden Seiten der Achse das elektrische Feld  $\bar{\mathfrak{E}}$  symmetrisch gleich ist, und sich im ringförmigen Empfänger, der nur auf das magnetische Feld anspricht, aufhebt. Diese Sym-

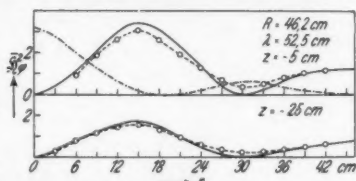


Fig. 12.  $\bar{\mathfrak{H}}_\varphi^2$  als Funktion von  $r$  im Fall des zweiten kritischen Radius bei  $\lambda = 52,5$  cm

metrie des elektrischen Feldes ist an der Stelle  $r = 31,5$  cm nicht vorhanden, da das Maximum des elektrischen Feldes gegen das Minimum des magnetischen, wie bereits gesagt, etwas verschoben ist. Im allgemeinen ist aber sonst die Übereinstimmung zwischen Messung und Theorie gut.

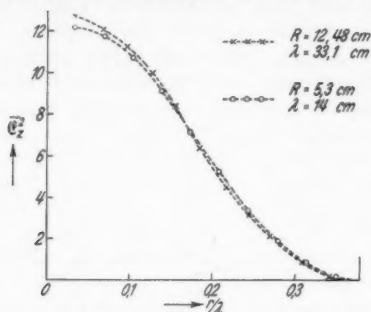


Fig. 13.  $\overline{E}_z$  als Funktion von  $r/\lambda$  im Fall des ersten kritischen Radius

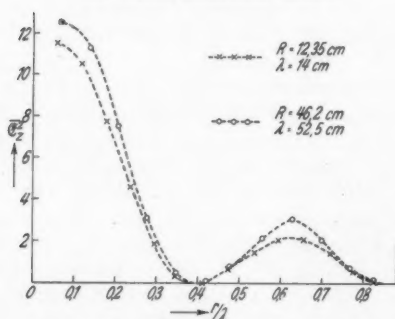


Fig. 14.  $\overline{E}_z$  als Funktion von  $r/\lambda$  im Fall des zweiten kritischen Radius

In den Figg. 13 und 14 sind nochmals die Messungen von  $\overline{E}_z$  in den Zylindern mit dem 1. und 2. kritischen Radius bei den verschiedenen Wellenlängen in einer etwas anderen Darstellung zusammengestellt. Als Abszisse ist  $r/\lambda$  aufgetragen, so daß der Kurvenverlauf unabhängig von  $\lambda$  wird.

*Nichtkritische Radien.* Auch für die Wellenlänge von  $\lambda = 52,5$  cm wurde untersucht wie sich der Verlauf der  $\overline{E}_z$ -Komponente des elektrischen Feldes im Innenraum des Zylinders

bei einer Änderung von  $R$  verhält. Die Ergebnisse einiger solcher Messungen und zwar bei den Radien  $R = 42,5$ ,  $43,4$ ,  $46,2$  (kritischer Wert) und  $47,9$  cm in der Ebene  $z = -10$  cm sind in der Fig. 15 wiedergegeben. Auch aus diesen Messungen geht deutlich hervor, daß nur bei kritischen Radien ( $R = 46,2$ )

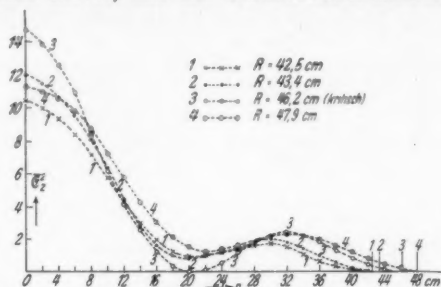


Fig. 15.  $\bar{G}_2$  als Funktion von  $r$  im Fall kritischer und nichtkritischer Radien bei  $\lambda = 52,5$  cm

die Komponente  $\bar{G}_2$  in der Zylinderachse und bei  $r = 32$  cm maximale Werte annimmt und gleichzeitig bei  $r = 20$  cm eine scharf ausgeprägte Nullstelle aufweist.

Bei den nichtkritischen Radien dagegen verschwindet die Nullstelle und das noch vorhandene Minimum für  $\bar{G}_2$  ist gegen die Nullstelle beim kritischen Radius verschoben, und zwar nach kleineren Werten von  $r$ , wenn  $R$  kleiner, nach größeren Werten von  $r$ , wenn  $R$  größer ist als der kritische Radius.

### 3. Messungen in einem beiderseitig geschlossenen Zylinder

In der zu Anfang mitgeteilten Theorie von Weyrich werden Zylinder von unendlicher Länge vorausgesetzt, und es wird angenommen, daß keinerlei Energie vom Zylinder abgestrahlt wird. Bei den Versuchen war es aber aus praktischen Gründen unmöglich, derartige Zylinder zu benutzen. Die Länge der Zylinder betrug aus räumlichen Gründen nur einige Wellenlängen der jeweils benutzten Wellen. Die Folge ist, daß an den offenen Zylinderenden eine beträchtliche Energieabstrahlung erfolgt, auf die weiter unten noch besonders eingegangen wird. Es wurde versucht, diese Abstrahlung dadurch zu verhindern, daß der Zylinder an einem Ende bzw. auch an beiden Enden mit einer Metallplatte abgedeckt wurde. Es entstand dann eine Spiegelung des Zylinderinnenraums an den Deckplatten. Die Versuche ergaben, daß sich in Richtung

der  $z$ -Achse (Zylinderachse) eine stehende Welle ausbildete. Die Lage der Endplatten wurde so gewählt, daß sich im abgeschlossenen Raum ein Maximum für  $\mathcal{E}_z^2$  ergab. Dann wurde in der  $z$ -Richtung das Feld in bekannter Weise ausgemessen. Die Ergebnisse einer derartigen Messung sind in Fig. 16 wiedergegeben. Die Kurve 1 ist bei beiderseitig offenem Zylinder

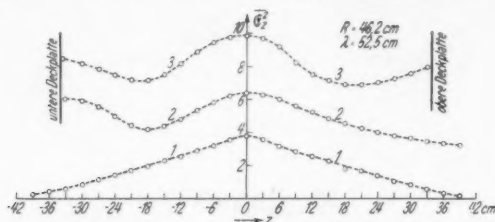


Fig. 16.  $\mathcal{E}_z^2$  als Funktion von  $z$  bei offenem und abgedecktem Zylinder

gemessen. Wurde nur eine Deckplatte in der Ebene  $z = -33,5$  cm angebracht, so ergab sich die Kurve 2, die Feldstärke steigt im Zylinder in der Äquatorebene auf ungefähr den 1,5fachen Betrag, der Abfall in Richtung der Achse nach dem offenen Ende ist noch vorhanden; vor der Deckplatte bildet sich eine stehende Welle aus mit einem Maximum von  $\mathcal{E}_z$  an der Deckplatte, was auch nach den Maxwell'schen Grenzbedingungen zu erwarten ist, da ja  $\mathcal{E}_z$  senkrecht zur Deckplatte steht. Nach Anbringung einer zweiten Deckplatte in  $z = +33,5$  cm wurde die Kurve 3 erhalten. Die Feldstärke ist weiter angestiegen und auch vor der zweiten Deckplatte hat sich eine stehende Welle ausgebildet.

#### 4. Die Abstrahlung der Energie an den Zylinderenden

Zum Schluß wurde noch untersucht, in welcher Form die Abstrahlung der elektromagnetischen Energie an den offenen Zylinderenden vor sich geht. Diese Messungen wurden für den Fall des ersten kritischen Radius bei der Welle  $\lambda = 33,1$  cm, also am Zylinder mit dem Radius  $R = 12,48$  cm und für den Fall des zweiten kritischen Radius bei der Welle  $\lambda = 52,5$  cm bei dem Zylinder mit dem Radius  $R = 46,2$  cm vorgenommen. Die Messung der elektrischen Feldstärke geschah in der Weise, daß ein Linearempfänger in einer Meridionalebene auf einem Kreise um die Zylinderöffnung herumgeführt wurde, wobei der Mittelpunkt dieses Kreises mit dem Mittelpunkt der betreffenden

Zylinderöffnung zusammenfiel. Der Empfänger wurde an jedem Meßpunkt in die Richtung maximaler Feldstärke gedreht. Diese fiel stets mit der Achsenrichtung des Zylinders zusammen, so daß also der Wert von  $\mathcal{E}_z^2$  aufgenommen wurde. Für den Fall des ersten kritischen Zylinderradius ist das Ergebnis der Messungen in dem Diagramm 1 der Fig. 17 wiedergegeben und zwar sind die gemessenen Werte von  $\mathcal{E}_z^2$  in Polarkoordinaten vom Mittelpunkt des Zylinderendes eingetragen. Die Lage des Zylinders ist ebenfalls eingezeichnet. Die strahlende Antenne befand sich 35 cm von dem Ende des Zylinders, an dem die austretende Strahlung gemessen wurde. Der ganze Zylinder war 170 cm lang.

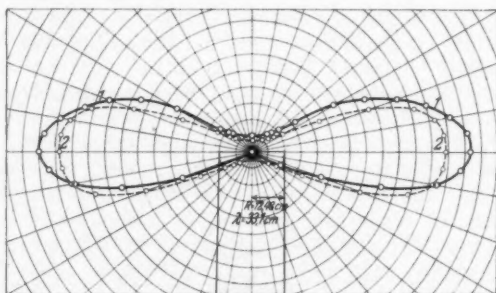


Fig. 17. Strahlungsdiagramm des Zylinders  
im Fall des ersten kritischen Radius bei  $\lambda = 33,1$  cm

Das so erhaltene Strahlungsdiagramm ähnelt stark dem einer in der Grundschiwingung erregten frei strahlenden Linearantenne. Das Maximum der Strahlung erfolgt senkrecht zur Richtung der Zylinderachse. Dies ergibt sich auch aus der Lage des Poyntingschen Vektors am Zylinderende. Im Innenraum des Zylinders nehmen die elektrische Feldkomponente  $\mathcal{E}_z$  und die magnetische Feldkomponente  $\mathcal{H}_\varphi$  im Falle des kritischen Radius maximale Werte an. Die Komponente  $\mathcal{E}_r$  des elektrischen Feldes ist sehr klein und gegen  $\mathcal{E}_z$  zu vernachlässigen. Die Richtung der resultierenden elektrischen Feldstärke liegt also parallel zur  $z$ -Achse, die magnetischen Kraftlinien bilden Kreise, deren Ebenen senkrecht zur  $z$ -Achse liegen. Der Poyntingsche Vektor zeigt daher in Richtung der Zylinderachsen nach außen.

In Fig. 17 ist in dem Diagramm 2 gleichzeitig das Strahlungsfeld der Linearantenne allein ohne Zylinder eingetragen;



die Antenne stand bei dieser Messung an der Stelle, an der sich vorher der Mittelpunkt der strahlenden Zylinderöffnung befand. Die Strahlung der Linearantenne ohne den auf den ersten kritischen Radius eingestellten Zylinder ist also etwas kleiner als die Strahlung des in Resonanz befindlichen Zylinders. Berücksichtigt man aber, daß ungefähr die gleiche Strahlungsleistung aus der anderen Zylinderöffnung herausgeht, so ergibt sich, daß der von einer Linearantenne erregte Zylinderraum im Falle der Resonanz beim ersten kritischen Radius ungefähr doppelt so stark strahlt, wie die Linearantenne allein. Es ist also der von der Antenne in elektromagnetischer Resonanz angeregte Zylinderhohlraum ein besserer Strahler als die Antenne selbst. Wir haben hier im Gebiet der elektromagnetischen Strahlung eine Anordnung, die in gewissem Sinne ein Analogon in der Akustik findet. Eine Stimmgabel strahlt eine wesentlich größere Energie in die Umgebung ab, wenn sie auf einen Resonanzkasten aufgesetzt ist, der ebenfalls ein besserer Strahler ist als die Stimmgabel allein.

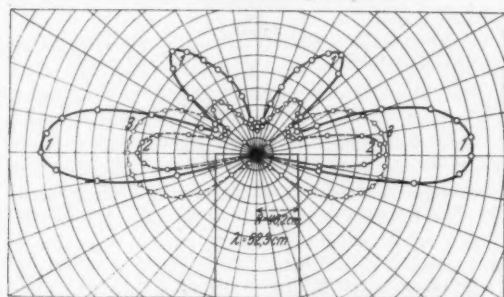


Fig. 18. Strahlungsdiagramm des Zylinders  
im Fall des zweiten kritischen Radius bei  $\lambda = 52,5$  cm

Die Fig. 18 zeigt schließlich die Meßergebnisse, die an einem Zylinder mit dem zweiten kritischen Radius  $R = 46,2$  cm bei einer Welle von  $\lambda = 52,5$  cm in bezug auf die Abstrahlung am Zylinderende erhalten wurden. Die wieder in der Grundschwingung erregte Linearantenne befand sich in der Achse des Zylinders und war 114 cm vom Zylinderende entfernt. Das Diagramm 2 gibt die Strahlung wieder, die bei beiderseitig offenem Zylinder erhalten wurde. Die Hauptstrahlungsrichtung steht wieder senkrecht auf der Zylinderachse, es tritt aber noch gleichzeitig eine zweite bevorzugte Strahlungsrichtung auf, die unter etwa  $40^\circ$  gegen die Zylinderachse geneigt ist. Es



ist also das gesamte Strahlungsdiagramm dem einer in der dritten Oberschwingung erregten Linearantenne sehr ähnlich. Wurde der Zylinder an der der Ausstrahlungsöffnung gegenüberliegenden Öffnung durch eine Metallplatte abgedeckt, so stieg die aus dem Zylinder heraustretende Strahlung auf fast den doppelten Betrag. Das in diesem Fall erhaltene Strahlungsdiagramm ist in der Fig. 18 in der Kurve 1 wiedergegeben. Zum Vergleich ist in Kurve 3 noch das Strahlungsdiagramm der Linearantenne ohne einhüllenden Zylinder eingetragen. In diesem letzten Fall stand die Linearantenne an der Stelle, wo sich vorher die Mitte der freien Zylinderöffnung, die ja als Ausgangspunkt der vom Zylinder ausgehenden Strahlung anzusehen ist, befand.

Diese letzten Versuche zeigen zwei Ergebnisse, die für die praktische drahtlose Telegraphie von Bedeutung sein können. Erstens wird die Strahlungsleistung einer in der Grundschwingung erregten Linearantenne durch Umgeben mit einem metallischen Hohlzylinder, dessen Radius einen durch die ausgestrahlte elektrische Welle bestimmten kritischen Wert haben muß, wesentlich erhöht und zweitens ist es möglich, die Form des Strahlungsdiagrammes durch die Anbringung des Metallzylinders zu verändern. Besonders das erste Ergebnis, die Erhöhung der Strahlungsleistung, dürfte beim Senden mit kurzen Wellen im Bereich unter 10 m eine praktische Anwendung finden, da die für diesen Wellenbereich notwendigen Zylinder noch keine allzu großen Dimensionen annehmen.

#### Zusammenfassung

Das Strahlungsfeld einer in ihrer Grundschwingung erregten Linearantenne, die sich in der Achse eines metallischen Hohlzylinders befindet, wird bei verschiedenen Wellenlängen und Zylinderradien ausgemessen, wobei der Abstand des Empfängers von der Zylinderachse und die Höhe des Empfängers über der Äquatorebene des Senders variiert werden. Die experimentell gefundenen Werte der elektrischen und magnetischen Feldstärkekomponenten werden den theoretisch berechneten gegenübergestellt. Die von der Theorie für bestimmte sogenannte kritische Zylinderradien geforderte elektromagnetische Resonanz des Zylinderraumes wird festgestellt. Sowohl die  $E$ -Komponente des elektrischen Feldes als auch die magnetische Feldstärke  $H$  nehmen bei diesen Radien maximale Werte an. Es zeigt sich innerhalb der Meßgenauigkeit gute Übereinstimmung zwischen der von Weyrich gegebenen Theorie und dem Experiment.

Außer der Feldverteilung im Innenraum des Zylinders, für die allein die Theorie zur Berechnung Gleichungen liefert, wurde auch das Feld im Außenraum um das offene Zylinderende herum gemessen. Hierbei ergab sich, daß die Strahlung des in Resonanz befindlichen Zylinders bei Erregung mit einer in der Grundschiwingung erregten Linearantenne aus der Zylinderöffnung beträchtlich größere Werte annimmt, als die frei strahlende Linearantenne ohne Zylinder und daß sich die Form des Strahlungsdiagramms mit der Ordnungszahl des kritischen Radius ändert.

Die vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1932/33 im Physikalischen Institut der Universität Breslau ausgeführt. Dem Direktor desselben, Herrn Professor Dr. Cl. Schaefer sind wir für sein stetes Interesse zu großem Dank verpflichtet. Herr Professor Dr. R. Weyrich, Brünn gab uns bei der theoretischen Auswertung der experimentellen Ergebnisse viele Ratschläge, für die wir auch an dieser Stelle unseren Dank aussprechen.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 17. August 1934)

---

**Untersuchungen  
an reinem Alpha-, Beta- und Gammamangan  
Von Fritz Brunke**

(Mit 12 Figuren)

**Einleitung**

1. Über die physikalischen Eigenschaften des reinen Mangans ist noch wenig bekannt, da es sich sehr schwer rein und in zusammenhängender Form darstellen läßt. Zwei Verfahren kommen für die Reindarstellung in Betracht: die Destillation im Vakuum [Tiede und Birnbräuer<sup>1)</sup>, Marie Gayler<sup>2)3)</sup>], die besonders wegen der leichten Flüchtigkeit des Mangans [Heusler und Lorenz<sup>4)</sup>] erfolgreich ist (vgl. Analyse Tab. 1); und die elektrolytische Abscheidung [Grube und Metzger<sup>5)</sup>]. Keines dieser Verfahren aber liefert das reine Mn ohne weiteres in kompakter, für physikalische Messungen geeigneter Form. Dies hängt mit der komplizierten Gitterstruktur des Mn zusammen. Nach den Untersuchungen von Westgren und Phragmén<sup>6)</sup> kommt Mn in drei verschiedenen Modifikationen vor. In welchen Temperaturbereichen diese Phasen stabil sind, wurde von M. Gayler festgestellt<sup>7)</sup>. Bei Zimmertemperatur und bis hinauf zu 742° C ist die kubisch-raumzentrierte  $\alpha$ -Phase stabil, oberhalb 742° die ebenfalls kubisch-raumzentrierte  $\beta$ -Phase. Diese wird bei 1191° von der tetragonal-flächenzentrierten  $\gamma$ -Phase abgelöst (Gitterkonstanten Tab. 1). Die Dichten der drei Manganmodifikationen (Tab. 1) sind nun wesentlich voneinander verschieden. Das  $\gamma$ -Mn hat dabei die geringste Dichte, die

- 1) E. Tiede u. E. Birnbräuer, Ztschr. f. anorg. Chem. 87. S. 129. 1914.
- 2) M. Gayler, Journ. Iron and Steel Inst. 115. S. 393. 1927.
- 3) M. Gayler, Metallwirtschaft 9. S. 677. 1930.
- 4) R. Lorenz u. Fr. Heusler, Ztschr. f. anorg. Chem. 3. S. 227. 1893.
- 5) F. Förster, Elektrochemie der wäßrigen Lösungen 1922. S. 560.
- 6) A. Westgren u. G. Phragmén, Ztschr. f. Phys. 33. S. 777. 1925.
- 7) M. Gayler, Nature 124. S. 840. 1929.

Tabelle 1

	$\alpha$ -	$\beta$ -	$\gamma$ -Mangan
Gitter . . . . .	kub. raumzen.	kub. raumzen.	tetrag. flächenz.
Atomzahl in der Elementarzelle . . . . .	58	20	4
Beständigkeitsbereich	unterhalb 742°C	742—1191° C	über 1191° C
Gitterkonstante . . . . .	8,901 ÅE	6,305 ÅE	$\left\{ \begin{array}{l} 3,767 \text{ ÅE} \\ \frac{c}{a} = 0,934 \end{array} \right.$
Spezifisches Gewicht .	7,4	7,29	7,2
Härte . . . . .	ritzt Glas	ritzt Glas	weich
Sprödigkeit . . . . .	sehr spröde	spröde	biegsam
Schmelzpunkt . . . . .	—	—	1290° C

Verunreinigungen des vakuumdestillierten Mangans-Gayler

S	Si	Fe	Al	P
—	0,002 %	Spuren	Spuren	0,003 %

über das  $\beta$ - zum  $\alpha$ -Mn hin ansteigt. Will man etwa durch Umschmelzen des destillierten Mangans, das vollkommen zerrissen und so spröde ist, daß man es leicht mit den Fingern zerbrechen kann, einen kompakten Manganstab herstellen, so wird das nicht gelingen. Sobald sich beim Abkühlen die Phasenumwandlung vollzieht, wird der Stab infolge der eintretenden Dichteänderung zerspringen.

2. Dieses Zerreißen des Mn erschwert besonders die elektrischen Messungen. So nimmt es nicht wunder, daß über die elektrischen Eigenschaften des reinen Mn, die das Hauptthema der vorliegenden Arbeit bilden, überhaupt noch keine Messungen vorhanden sind. Lediglich unreines Mn ist schon einige Male untersucht worden.

Bridgman<sup>1)</sup> fand für einige unreine Proben zwischen 0 und 100° C (linear extrapoliert aus Messungen bei 25 und 75°) den Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstands<sup>2)</sup>  $\alpha = 0,00078$ .

Bridgman erklärt den kleinen Wert von  $\alpha$  durch die Verunreinigungen seiner Proben.

1) P. W. Bridgman, Proc. Americ. Acad. Arts and Sc. **64**. S. 55. 1929.

2) Es bedeutet  $\alpha = \frac{w_2 - w_1}{w_0 (T_2 - T_1)}$ , wo  $w_0$  der Widerstand bei  $T = 273^\circ \text{ K}$  ist.

W. Meißner und Voigt<sup>1)</sup> haben ebenfalls zwei Proben Mn-Goldschmidt bis zu sehr tiefen Temperaturen untersucht. Sie finden:

$T = 273,16$	88,90	77,82	20,46° K
$r_1 = I$	0,9776	0,9807	1,0020
$r_2 = I$	0,9695	0,9729	1,0082

Der spezifische elektrische Widerstand beträgt

$$\rho_1 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ und } \rho_2 = 6 \cdot 10^{-4}.$$

Bildet man  $\alpha$  zwischen 273,16 und 88,90° K ohne Rücksicht auf die bei tieferen Temperaturen erfolgende Widerstandszunahme, so ergibt sich:

$$\alpha = 0,00012; \quad \alpha = 0,00016.$$

Auch Ochsenfeld<sup>2)</sup> hat in seiner Arbeit über das System Mn-Stickstoff für einige Proben  $\alpha$  angegeben. Die Werte schwanken zwischen 0,00075 und 0,00033. Dabei muß man allerdings bedenken, daß die Proben verschieden stark mit Stickstoff beladen sind.

#### Untersuchungen an reinem $\alpha$ -Mangan

3. Miß Gayler hatte dem Physikalischen Institut in Marburg reines vakuumdestilliertes Mn für die Versuche von Ochsenfeld zur Verfügung gestellt. Hiervon waren noch etwa 15 bis 20 g für die vorliegenden Untersuchungen übrig.

Zuerst wurde der elektrische Widerstand dieses ursprünglichen Destillationsproduktes gemessen. Das ungefähr 1,5 cm lange ungleichmäßig geformte Manganstück war auf einem Hartgummibänkchen befestigt. Die Stromzuführung geschah mittels zweier Metallfedern, die an den Enden des Bänkchens angeschraubt waren. Um sicheren Kontakt zu gewährleisten, ohne daß dabei die brüchige Probe entzweigend, wurden an den Federn noch Stanniolkissen angebracht. Ferner waren zwei Platinhaardrähte um die Probe geschlungen, die zur Abnahme des Potentials dienten. Die Widerstände wurden durch Vergleich mit dem Ausschlag eines Normalwiderstandes bestimmt. Zur Messung diente ein Drehspulgalvanometer von Hartmann & Braun mit hoher Stromempfindlichkeit.

Die ersten Messungen ergaben:

$T = 0^\circ \text{C}$	$- 184^\circ \text{C}$	$+ 18^\circ \text{C}$
$w = 0,0165_s$	0,0161 <sub>o</sub>	0,0161 <sub>i</sub>

1) W. Meissner u. B. Voigt, Ann. d. Phys. [5] 7. S. 761. 1930.

2) R. Ochsenfeld, Ann. d. Phys. 12. S. 353. 1932.

Wenn auch die Reproduzierbarkeit der Messungen schlecht ist und bei fortgesetztem Temperaturwechsel noch viel ungünstiger wurde, so kann doch kein Zweifel bestehen, daß der TK. dieser Probe aus reinem Mn ungewöhnlich klein war. Aus den beiden ersten Zahlen ergibt sich  $\alpha = +0,00015$ . Für eine andere einigermaßen reproduzierbare Messung an derselben Probe ergab sich zwischen  $+19^\circ$  und  $-79^\circ \text{C}$

$$\alpha = +0,00014.$$

Außerdem wurde noch ein Mn-Stab untersucht, der durch Umschmelzen im Vakuum erhalten worden war. (Beschreibung des Ofens erfolgt in Ziffer 25). Die Werte für den Widerstand schwankten ebenfalls sehr unregelmäßig. Die Meßergebnisse sind:

$w_{20}: 0,516_7$	$0,524_6$	$0,524_6$	$0,534_6 \text{ Ohm} \cdot 10^3$
$w_{-79}: 0,525_1$	$0,531_1$		$0,534_6 \text{ „} \cdot 10^3$

Ein Wert für  $\alpha$  läßt sich daraus nicht errechnen.

Man geht wohl nicht fehl, wenn man die bei den Messungen auftretenden Unregelmäßigkeiten den im Material vorhandenen Rissen zuschreibt. Daß aber nur diese für den kleinen Wert des TK. verantwortlich zu machen sind, ist ziemlich ausgeschlossen. Trotzdem war es zur einwandfreien Klärung der Verhältnisse nötig, meßbare Proben von  $\alpha$ -Mn herzustellen, die vollkommen frei von Rissen sind.

Der beste Weg schien zu sein, das Mn aus der Dampfphase auf einer Fläche niederzuschlagen, deren Temperatur unter dem Umwandlungspunkt des  $\beta$ - in das  $\alpha$ -Mn liegt. Dann war zu erwarten, daß sich sofort  $\alpha$ -Mn abscheidet, ohne durch die anderen Modifikationen hindurch gehen zu müssen, wie z. B. beim Abkühlen aus der Schmelze. Mn verdampft im Hochvakuum schon merklich bei einer Temperatur von  $600^\circ \text{C}$ . Die Verdampfung beginnt schon, während sich das Metall noch in der  $\alpha$ -Phase befindet.

#### Verdampfung von Mangan

4. Die Verdampfungseinrichtung ist in Fig. 1 im Schnitt wiedergegeben. Die Röhre bestand vollkommen aus Glas. Durch den Schliff  $S_1$  konnte der Ofen O eingesetzt werden. Durch den Schliff  $S_2$  wurde das Kühlrohr eingeführt, an dem sich das Auffangblättchen befand. Der Schliff  $S_3$  wird später erklärt.

5. *Der Ofen.* Die Konstruktion des Ofens (Fig. 2) bereitete mancherlei Schwierigkeiten. Tiegel aus K-Masse und D-Masse

der Staatl. Porzellanmanufaktur Berlin wurden im Laufe der Zeit von dem geschmolzenen Mn angegriffen. Dagegen sind die neuerdings von der Degussa hergestellten Tiegel aus  $Al_2O_3$  gegen geschmolzenes Mn absolut beständig, solange in neutraler oder reduzierender Atmosphäre gearbeitet wird. In oxydierender Atmosphäre werden sie sofort zerstört. Die Tiegel haben sich bei unseren Versuchen bestens bewährt. Als Heizdraht diente Molybdändraht (Durchmesser 0,2 mm) und später auch Mo-Band<sup>1)</sup>. Der Draht wurde mit 1 mm Ganghöhe auf den Tiegel für das Mn aufgewickelt. Diesen Tiegel umschloß ein Rohr aus  $Al_2O_3$ , das als Strahlungsschutz diente. Beide wurden in einen

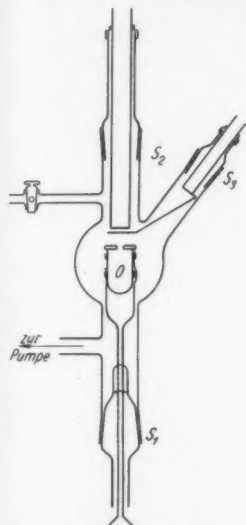


Fig. 1. Verdampfungsapparatur

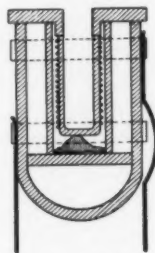


Fig. 2

weiten Tiegel aus Hartporzellan eingesetzt. Dieser Tiegel wurde mit einer Platte aus  $Al_2O_3$  abgedeckt, in der sich ein kreisrundes Loch befand, dessen Durchmesser gleich dem inneren Durchmesser des Ofentiegels war. An der Platte befand sich ein Wulst, der in das Schutzrohr hineingriff und etwa verdampfendes Mo des Heizdrahtes vom Niederschlag fernhielt. Die Stromzuführungen aus mehrfach zusammengeschlungenen Drähten der Heizwicklung blieben selbst bei stärkstem Glühen der Wicklung dunkel.

Die Arbeitstemperaturen lagen meist nahe dem Schmelzpunkt des Mn ( $1291^{\circ}C$ ). Die Ofentemperaturen wurden aus dem Widerstand der Heizwicklung bestimmt, wenn nicht Kurz-

1) Für die freundliche Überlassung von Mo-Draht und Mo-Band sind wir der Osram A.G. zu Dank verpflichtet.



schloß einiger Windungen, der oft eintrat, dies unmöglich machte. Die mit Mo-Band bewickelten Öfen haben sich in dieser Hinsicht besser bewährt. Auch wurde die Wärme des Bandes viel besser auf den Ofentiegel übertragen als bei den Wicklungen mit Draht. Zur Heizung diente eine 65 Volt-Batterie. Die Stromstärke im Zeitpunkt der Verdampfung betrug durchschnittlich 3 Ampere, die Klemmenspannung des Ofens ungefähr 45 Volt.

Die Versuchsröhre wurde mit einer dreistufigen Gaedediffusionspumpe aus Stahl evakuiert. Die Kühlfalle wurde mit festem  $\text{CO}_2$  oder flüssiger Luft beschickt, nach Maßgabe der tiefsten Temperaturen der Auffangfläche. Während der Mn-Verdampfung konnte Klebevakuum aufrecht erhalten werden.

#### Verdampfungen

6. *Niederschläge auf gekühlten Flächen.* Als Auffangblättchen dienten dünne Glasscheibchen (Dicke 1 mm; Länge 2 cm; Breite 1,4 cm) oder auch frisch gespaltene Glimmerblättchen. Glas war vorteilhafter, da sich von dem Glimmer sehr leicht kleine Flitter ablösten, die sich samt dem Niederschlag abrollten. Die Blättchen wurden mit einer Kupferkappe fest gegen das Messingkühlrohr gepreßt. Doch befand sich noch eine rechteckige Glimmerblende vor dem Blättchen, wodurch das Anpressen einwandfrei ermöglicht wurde. Eine Metallblende erwies sich als sehr ungünstig, weil sie an den Rändern des gebildeten Niederschlags die Wärme stärker abführte, als es in der Mitte durch das Kühlrohr geschah. Infolge der auftretenden thermischen Spannungen zerrissen dann die Schichten regelmäßig.

7. Zwischen Ofen und Auffangblättchen befand sich noch ein Schutzblättchen, das zur besseren Kühlung an einem Kupferhalter befestigt war, der seinerseits wiederum durch Wasser gekühlt wurde. Solange der Ofen angeheizt wurde, verdeckte das Schutzblättchen die Auffangfläche. Erst wenn die Verdampfung voll eingesetzt hatte, wurde das Schutzblättchen mittels eines Schliffes (in der Fig. 1 mit  $S_3$  bezeichnet) zur Seite gedreht. Diese Anordnung hatte folgenden Zweck: während die Temperatur des Ofens anstieg, verschlechterte sich das Vakuum naturgemäß immer etwas. Es konnte also vielleicht Gas mit in den Niederschlag gelangen und diesen verunreinigen. Obige Anordnung gestattete abzuwarten bis wieder Hochvakuum erreicht war, ehe das Schutzblättchen weggedreht wurde und sich Mn auf dem Auffangblättchen niederschlagen konnte.



Der Abstand zwischen Ofen und Auffangfläche konnte mittels einer einfachen Einrichtung leicht verändert werden. In der Regel betrug der Abstand 3 cm. Bei wesentlich kleinerem Abstand (1 cm) konnte nicht gearbeitet werden, da sich dann keine zusammenhängenden Niederschläge bildeten.

Die Glasblättchen wurden immer mit reiner Salpetersäure, Salzsäure, destilliertem Wasser und zuletzt mit Alkohol gereinigt. Peinliche Sauberkeit der Flächen war unbedingt erforderlich. Schon Spuren von Fett genügten z. B., um eine einwandfreie Bildung des Niederschlags zu verhindern.

Der Ofen wurde sehr langsam während etwa 2 Std. angeheizt. Die eigentliche Verdampfungszeit schwankte zwischen wenigen Minuten und einer Stunde.

Ein neu gewickelter Ofen wurde mehrere Stunden im Vakuum ausgeheizt, ehe er mit Mn-Gayler beschickt wurde.

8. Solange das wassergekühlte Messingrohr verwandt wurde, war ein Zerreißen der Niederschläge kaum zu verhindern. Die Betrachtung mit dem Reflexionsmikroskop (100fache Vergrößerung) zeigte meist feine Risse. Einige Niederschläge waren vollkommen zusammenhängend. Es konnte mit dem Metallmikroskop kein Riß entdeckt werden. Andere wieder rollten sich gänzlich von ihrer Unterlage ab. Es geschah dies meist erst dann, wenn der Ofen abgeschaltet wurde, oder auch schon während des Verdampfens, sobald versucht wurde, dickere Schichten herzustellen.

Um den Einfluß der Temperatur der Auffangflächen auf die Niederschlagsbildung festzustellen, wurden sie einmal sehr stark gekühlt und andererseits bis zu Temperaturen von  $500^{\circ}\text{C}$  geheizt.

9. *Niederschläge auf stark gekühlten Flächen.* Die Auffangblättchen wurden bis zu etwa  $-79^{\circ}\text{C}$  abgekühlt. Dabei war die Kühlfalle vor der Apparatur auf  $-190^{\circ}\text{C}$ . Durch den Schliff  $S_2$  wurde ein Neusilberrohr eingesetzt, an das ein massiver Kupferblock von 30 mm Länge hart angelötet war. Durch Einfüllen des Kühlbades in das Neusilberrohr konnten der Kupferblock und das daran befindliche Glasblättchen während der Verdampfung gekühlt oder die Niederschläge, die ohne Kühlung hergestellt waren, abgeschreckt werden. Auf diesen stark gekühlten Flächen wurden keine zusammenhängenden Niederschläge erhalten. Außerdem saßen sie sehr locker auf ihrer Unterlage auf. Sie ließen sich leicht mit dem Finger abwischen. Schenck und Kortengräber<sup>1)</sup> kommen zu einem ähnlichen Ergebnis.

1) R. Schenck u. A. Kortengräber, Ztschr. f. anorg. u. allg. Chem. 210. S. 273. 1930.

In derselben Anordnung wurden auch einige Niederschläge ohne Kühlung hergestellt. Sie waren frei von jeglichen Rissen. Wurden schon gebildete Niederschläge plötzlich abgekühlt, indem festes  $\text{CO}_2$  in das Neusilberrohr eingefüllt wurde, so blieben die Niederschläge zusammenhängend.

10. *Niederschläge auf geheizten Flächen.* Besser waren die Ergebnisse mit geheizten Auffangblättchen. Durch den Schliff  $S_2$  wurde jetzt ein zweiter Ofen in die Apparatur eingeführt. Er war dem Verdampfungssofen ähnlich, nur war er statt der Platte aus  $\text{Al}_2\text{O}_3$  mit einer massiven Kupferplatte verschlossen, auf die das Glasblättchen aufgeschraubt wurde. Die Temperatur des Ofens konnte leicht aus dem Widerstand der Heizwicklung bestimmt werden. Die bei dieser Methode erhaltenen Niederschläge waren gleichmäßig hochspiegelnd und vollkommen zusammenhängend. Mit dem Reflexionsmikroskop konnten keine Risse festgestellt werden. Die Niederschläge saßen sehr fest auf ihrer Unterlage auf. Sie ließen sich mit einem scharfen Messer kaum davon entfernen. Die Versuche ergeben, daß nur die Temperatur der Auffangfläche während der Niederschlagsbildung für die rissefreie Schichtbildung verantwortlich zu sein scheint.

11. Die Dicke der Schichten ergab sich durch Wägung zwischen  $0,3$  und  $2\mu$ . Dickere Schichten in zusammenhängender Form herzustellen gelang nicht. Lediglich ein Stück eines zersprungenen Niederschlags von  $\frac{1}{10}$  mm Dicke war groß genug, um elektrische Messungen daran vornehmen zu können. Die Mn-Spiegel waren an der Luft nicht lange haltbar. Nach einigen Tagen wurden sie leicht trübe und oxydierten im Laufe von einigen Wochen vollkommen. Bei den zusammenhängenden Schichten ging die Oxydation nicht so schnell vonstatten wie bei den zerrissenen Niederschlägen. Die Ränder der Risse oxydierten in ganz kurzer Zeit. Vollen Schutz gab das Einschmelzen der Spiegel in evakuierte Reagenzgläser.

#### Struktur des durch Verdampfung erhaltenen Mangans

12. *Röntgenographische Untersuchungen.* Um festzustellen, ob die Mn-Spiegel sich wirklich in der  $\alpha$ -Phase befanden, wurden Röntgenaufnahmen nach der Debye-Scherrer Methode gemacht. Da eine Röhre mit Chromstrahlung, die sich am besten für Mn-Aufnahmen eignet, nicht vorhanden war, benutzten wir eine Röhre mit Eisenantikathode (8 mA, 40 kV). Das Mn wurde nach Abkratzen vom Auffangblättchen in Röhren aus Zigarettenpapier eingefüllt. Die Dicke des Präparats betrug etwa 0,8 mm. Bei einigen Aufnahmen war das Material

mittels Zaponlackes auf dünne Stäbchen aus Bleiglas aufgekittet.

Bei einem Teil der Niederschläge mußte auf Röntgenaufnahmen verzichtet werden, weil die Niederschläge zu fest am Glas hafteten oder zu wenig Material enthielten.

Die Niederschläge bestanden — bis auf zwei Ausnahmen — aus  $\alpha$ -Mn. Alle Linien der Diagramme konnten einwandfrei dem  $\alpha$ -Mn zugeordnet werden.

13. Dagegen zeigten die beiden Ausnahmen eine gänzlich andere Struktur, die mit keiner der drei Phasen des Mn übereinstimmt und auch mit einem Phasengemisch nicht vereinbar ist. Fig. 3 zeigt diese Diagramme. Die stärksten Linien

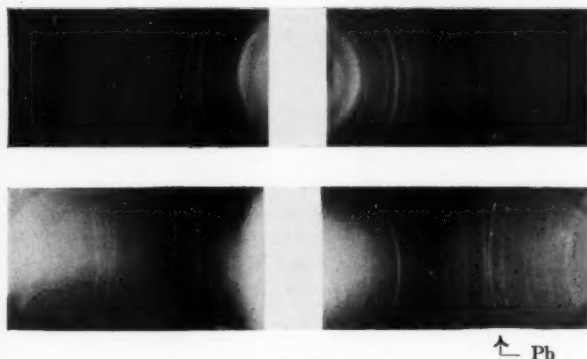


Fig. 3

des  $\alpha$ -Mn sind gerade noch schwach vorhanden. Die übrigen Linien gehören einem kubischen Gitter an, dessen Gitterkonstante 3,3 Å beträgt. Eine Verunreinigung durch ein Metall ist ausgeschlossen. Jeder der beiden Niederschläge entstand mitten in einer Verdampfungsreihe. Eine Verunreinigung durch Gase kann dagegen möglich sein. Oxyde kommen kaum in Betracht, da sie andere Röntgendiagramme zeigen, als hier erhalten wurden. Dagegen hat vielleicht Nitridbildung vorgelegen. Dafür spricht auch die Gitterkonstante, die sich aus den Aufnahmen ergab. Die beiden Spiegel zeigten ungefähr dasselbe Reflexionsvermögen, aber ein wesentlich anderes elektrisches Verhalten als die übrigen Niederschläge (Ziffer 17).

14. *Laueaufnahmen.* Von einigen Niederschlägen wurden mittels einer Lehmannschen Kamera Laueaufnahmen her-

gestellt. Als Strahlungsquelle für das „weiße Röntgenlicht“ diente eine Wolframröhre (9 mA, 60 kV). Die auftretenden Reflexe (Fig. 4) geben Auskunft darüber, daß die Spiegel eine

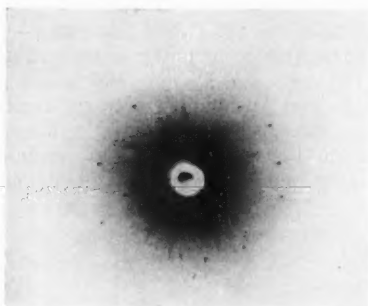


Fig. 4

Wachstumstextur besessen haben. Auch bei anderen durch Verdampfung hergestellten Metallschichten hat man Wachstumstextur festgestellt, so bei Pt, Cu, Ni<sup>1)</sup>, Bi<sup>2)</sup> und Co<sup>3)</sup>.

#### Elektrische Messungen an den verdampften Schichten

Da die Proben nicht immer ganz regelmäßig waren und auch die Bestimmungen der Dicke ungenau sind, wurde vor

allen Dingen der TK. des elektrischen Widerstands bestimmt, während nur einige Proben auf das elektrische Leitvermögen untersucht wurden.

15. *Die Meßanordnung.* Die dünnen Niederschläge wurden auf der gleichen Unterlage, auf der sie sich gebildet hatten,

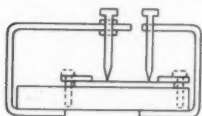


Fig. 5



Fig. 6

elektrisch untersucht. Nur eine Probe, die  $\frac{1}{10}$  mm dick war, hatte sich von ihrer Unterlage abgetrennt und konnte frei gemessen werden. Fig. 5 zeigt die Meßanordnung, Fig. 6 die Skizze eines Niederschlags, von dem nichts abgesprungen

ist, in der Aufsicht. Der Spiegel wurde auf ein Hartgummibänkchen gelegt und mit zwei dicken Kupferbacken an beiden Enden festgeschraubt. Die Kupferklemmen dienten gleichzeitig

1) S. Dembinska, *Ztschr. f. Phys.* **54**. S. 46. 1929; J. D. Hanawalt u. L. R. Ingersoll, *Phys. Rev.* **34**. S. 172. 1929; *Nature* **119**. S. 234. 1927.

2) W. Büssem, F. Gross u. K. Hermann, *Ztschr. f. Phys.* **64**. S. 537. 1930.

3) E. Schmid, *Met. Wirtsch.* **8**. S. 651. 1929; *Ztschr. f. Met. Kunde* **21**. S. 72. 1928.

zur Stromzuführung. Zwischen den Kupferbacken und dem Spiegel waren noch Stanniolkissen eingeschoben. Dadurch wurde der Kontakt verbessert und auch ein Zerkratzen der spröden Niederschläge verhindert. Die eine der beiden Stromzuführungen ließ sich auf dem Hartgummibänkchen verschieben. Es konnten so Proben von verschiedener Länge untersucht werden. Zur Potentialabnahme dienten zwei spitze Kupferschrauben, die von Messingfedern gehalten auf den Niederschlag aufgesetzt wurden. Die eine der Schrauben konnte wieder längs der Probe verschoben werden.

16. Um die dünnen Niederschläge vor plötzlichen Temperaturwechseln, Oxydation und Luftfeuchtigkeit zu schützen, wurde die beschriebene Meßanordnung in ein kleines Schliffgläschen gebracht, das auf etwa 15 mm Hg evakuiert wurde. Höheres Vakuum erschwerte den Temperatúrausgleich zwischen der Probe und dem Temperaturbad.

Die Anordnung erwies sich bei der Messung des TK. eines dünnen gehämmerten Cu-Drahtes an Stelle der Mn-Spiegel als einwandfrei. Zwischen 20° und -79° C ergab sich  $\alpha = 0,0042$ .

17. Die Messungen an den Mn-Niederschlägen waren z. T. nicht so gut reproduzierbar wie die eben genannten Messungen an dem Kupferdraht. Bei den dünnen, empfindlichen Niederschlägen wird man das auch nicht erwarten können. Aus den Messungen, die am besten reproduzierbar waren, ergaben sich für die TK. einiger Schichten die folgenden Werte:

Dicke in $\mu$ : etwa	100	1	1	1	1	1
$\alpha \cdot 10^3$ :	0,19	0,1	0,15	0,16	0,19	0,16

gemessen zwischen Zimmertemperatur und -79° C.

Bei den ersten Messungen an dem durch Verdampfung hergestellten Mn-Stück von Miß Gayler (Ziffer 3) war ein TK. gefunden worden, der mit den hier gemessenen Werten gut übereinstimmt. Dieser überraschend kleine TK. ist also dem reinen  $\alpha$ -Mn eigentümlich. Die beiden Niederschläge mit dem unbekannten Röntgendiagramm (Ziffer 13) zeigten höhere Werte des TK. Die elektrischen Messungen waren gut reproduzierbar. Für die eine Probe ergab sich:

$$\alpha_{-79^{\circ}}^{+20^{\circ}} = +0,0021_7; \quad \alpha_{-183^{\circ}}^{+16^{\circ}} = +0,0028_9.$$

Für die zweite Probe ergab sich:  $\alpha_{-79^{\circ}}^{+20^{\circ}} = 0,001$ . Zwischen Zimmertemperatur und der Temperatur des flüssigen Stickstoffs konnte dabei keine Zunahme des TK. beobachtet werden wie bei der ersten Probe.

18. Für einige Spiegel, die aus reinem  $\alpha$ -Mn bestanden, ließ sich das spezifische elektrische Leitvermögen  $\sigma$  größenordnungsmäßig berechnen. Dazu wurde die Schichtdicke, Gleichmäßigkeit vorausgesetzt, durch Wägung bestimmt. Da die Schichten nur einige Zehntel Milligramm wogen und keine Mikrowaage zur Verfügung stand, ist die Dickebestimmung reichlich unsicher. Es ergaben sich die folgenden Werte:

Dicke der Schicht in $\mu$ :	0,23	1,45	0,56	0,25
$\sigma \cdot 10^{-4}$ :	0,13	0,1	0,17	0,34 $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ .

Es ist also auch das Leitvermögen des reinen  $\alpha$ -Mn viel kleiner, als es einem reinen Metall sonst zukommt. Selbst Bi hat etwa  $\sigma = 0,9 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ .

#### Untersuchungen an reinem $\gamma$ -Mangan

19. Nach diesen für ein reines Metall überraschenden Ergebnissen an  $\alpha$ -Mn war zu fragen, ob die anderen Phasen ein normaleres Verhalten zeigen. Das  $\gamma$ -Mn besitzt im Gegensatz zum  $\alpha$ - und  $\beta$ -Mn ein einfaches metallisches Gitter. Man kann deshalb auch am ersten für diese Phase normale Leitverhältnisse erwarten.

Aus der Literatur ergab sich, daß es bisher nicht gelungen ist, reines  $\gamma$ -Mn durch Abschrecken festzuhalten. Wir werden zeigen, daß dies doch möglich ist. Es gibt aber noch einen anderen Weg, um reines  $\gamma$ -Mn herzustellen. Nach den Untersuchungen von Westgren und Phragmén<sup>1)</sup> befindet sich frisch hergestelltes Elektrolyt-Mn in der  $\gamma$ -Phase. Man hat früher vermutet, es könnte sich bei dem Elektrolyt-Mn um ein Hydrid des Mn handeln. Westgren und Phragmén entscheiden diese Frage noch nicht eindeutig. Ihre Untersuchungen sprechen aber gegen das Hydrid. Daß Elektrolyt-Mn kein Hydrid ist, wurde zum ersten Male klar ausgesprochen von Persson<sup>2)</sup>. Außerdem finden schon Westgren und Phragmén, daß Elektrolyt-Mn — im Gegensatz zum  $\alpha$ - und  $\beta$ -Mn — weich und biegsam ist. Es ist unwahrscheinlich, daß das Hydrid eines spröden Metalls derartige Eigenschaften bekommt. Im Gegenteil werden elektrolytisch hergestellte Metalle durch Einschuß von Wasserstoff sehr spröde.

20. Es wurde deshalb versucht, reines  $\gamma$ -Mn auf elektrolytischem Wege herzustellen. Diese Darstellung des Mn weist infolge der starken Elektronegativität dieses Metalls recht

1) A. Westgren u. G. Phragmén, a. a. O.

2) E. Persson, Ztschr. f. phys. Chem. B. 9. S. 25. 1930.

erhebliche Schwierigkeiten auf. Die Abscheidung des Mn wird möglich, wenn man in stark konzentrierten Mn-Salzlösungen und bei hohen Stromdichten der Kathode arbeitet. Diese Darstellungsweise des Mn hat keine Bedeutung erlangen können, weil die elektrolytischen Niederschläge immer sehr stark mit Mn-Oxyden (50%  $\text{MnO}_2$ ) verunreinigt sind. Die Verunreinigung durch Oxyde wird verhindert, wenn man der Lösung des Mn-Salzes ein Ammoniumsalz zusetzt. Außerdem müssen die Anoden mit Diaphragmen umgeben werden. Über diesen Gegenstand lagen nur zwei Arbeiten vor. Eine kurze Notiz über eine Arbeit von Grube und Metzger findet sich bei Förster<sup>1)</sup>. Die Arbeit selbst wurde nicht veröffentlicht. Von Allmand und Campbell<sup>2)</sup> wurde ein ähnliches Verfahren ausgearbeitet. Außerdem fand sich noch eine Patentschrift der „Griesheim Elektron“ (I.G.)<sup>3)</sup>, die wohl mit der Arbeit von Grube und Metzger identisch ist.

Allmand und Campbell unterwerfen im wesentlichen nur Sulfate der Elektrolyse. Es wurde zunächst unter genau denselben Versuchsbedingungen, wie sie von den eben genannten Autoren angegeben werden, Mn elektrolysiert. Dabei wurden nur sehr dünne, und vor allen Dingen sehr spröde Niederschläge erhalten. Auch Allmand und Campbell haben bei ihren Versuchen nur sprödes Mn erhalten.

21. Die bei uns angewandten Versuchsbedingungen waren folgende: Elektrolysiergefäß: rechteckige Glaswanne von 24,5 · 14,5 · 11 cm. Zwei Platinanoden ( $\frac{1}{10}$  mm dick; 2 · 3,5 cm) befanden sich in gleicher Entfernung von einer Al-Kathode (2 · 3 cm; Dicke 1 mm). Diaphragmen: 4,5 cm Durchmesser, 10 cm Höhe. Ein Liter Wasser enthielt gelöst: 300 g  $\text{MnSO}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O} + 100 \text{ g } (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ . Die verwandten Salze waren von Kahlbaum bezogen, und zwar waren sie „rein“ bzw. „zur Analyse“. Die Temperatur des Bades betrug 30° C und wurde mit mehreren kleinen Gasflammen aufrecht erhalten. Die Batteriespannung betrug 20 Volt (zwischen Anode und Kathode etwa 7 Volt), die Stromstärke 1,2 Amp., das entspricht einer Stromdichte der Kathode von ungefähr 0,1 Amp./cm<sup>2</sup>. Infolge der großen Stromdichte wuchs das Mn an den Rändern der Kathode in Form von kleinen Ästen an. Um das zu verhindern, wurden die Ränder der Kathode mit Paraffin oder Bakelite bestrichen. Die Wasserstoffionenkonzentration soll

1) F. Förster, a. a. O.

2) A. J. Allmand u. A. N. Campbell, Trans. Faraday Soc. 19. S. 559. 1924; 20. S. 379. 1924.

3) D.R.P. Nr. 391594. Klasse 40c. Gruppe 12.



$10^{-6}$ — $10^{-8}$  betragen. Sie wurde mit geeigneten Indikatoren geprüft und mit reiner Schwefelsäure bzw.  $\text{NH}_4\text{OH}$  korrigiert. Die Dauer der Elektrolyse betrug im Durchschnitt 2—3 Std.

Für eine einwandfreie Niederschlagsbildung ist eine fortgesetzte Durchmischung des Bades unerlässlich. Allmand und Campbell finden, daß der Niederschlag zusammenhängender wird, wenn die Kathode rotiert und dabei an einem Wischer aus Hartgummi vorbeistreicht, der leicht dagegen gepreßt wird. Bei uns stand die Kathode fest, während kleine Hartgummiwischer davor rotierten. Dadurch wurde erreicht, daß mit Ausnahme der Elektroden keine Metalle, sondern nur Glas und Hartgummi mit dem Bad in Berührung kamen. Die Wischer bewirkten gleichzeitig eine gute Durchmischung des Bades. Die erhaltenen Niederschläge wurden sofort mit Wasser abgespült und dann mittels Alkohols, Äthers und zuletzt Fließpapiers getrocknet. Beim Herausnehmen aus dem Bad oxydierten sie leicht auf der Oberfläche. Auf der Rückseite waren sie blank und metallisch glänzend. Da die Proben sehr spröde waren, wurden keine elektrische Messungen an ihnen ausgeführt.

Wesentlich besser waren die Ergebnisse, als in derselben Anordnung dann eine Salzlösung elektrolysiert wurde, wie sie von Grube und Metzger verwandt worden ist. Die Lösung war

	6 normal in bezug auf $\text{MnCl}_2$ ,
1,5	" " " " $\text{NH}_4\text{Cl}$ ,
0,1	" " " " $\text{HCl}$ .

Die Salze waren „rein“ von Kahlbaum. Es galten dieselben Versuchsbedingungen wie vorher. Die Stromdichte der Kathode betrug diesmal  $0,2 \text{ Amp./cm}^2$ . Bei Elektrolyse mit einer Kupferkathode waren die Ergebnisse nicht so gut wie mit der Al-Kathode.

Die Niederschläge waren auf der Oberfläche oxydiert, was sich auch durch Arbeiten in einer  $\text{CO}_2$ -reichen Atmosphäre nicht verhindern ließ. Das niedergeschlagene Metall ließ sich — bis auf wenige Ausnahmen — leicht von der Kathode abtrennen. Es war auf der Rückseite blank.

Der erste so erhaltene Niederschlag war etwa 0,4 mm dick und vollkommen weich und duktil. Der Unterschied gegen das harte und spröde  $\alpha\text{-Mn}$  ist sehr auffällig. Die übrigen Niederschläge waren nicht so schön wie der erste. Sie besaßen oft kleine Löcher und Poren. Sie waren auch nicht so biegsam wie der erste. Wahrscheinlich beruht dieses Verhalten auf einem Einschluß von Wasserstoff.

Die Röntgendiagramme zeigten bei allen durch Elektrolyse hergestellten Proben — auch bei den spröden — reines  $\gamma$ -Mn (Fig. 10, oben). Sämtliche Linien konnten dem  $\gamma$ -Gitter zugeordnet werden.

#### Elektrische Messungen an Elektrolytmangan

22. Anordnung und Meßmethode zur Widerstandsbestimmung waren genau dieselben wie in Ziffer 15. Eine Meßreihe an der weichen  $\gamma$ -Mn-Probe ist in Fig. 7 graphisch dargestellt. Der Niederschlag war ungleichmäßig dick und an den

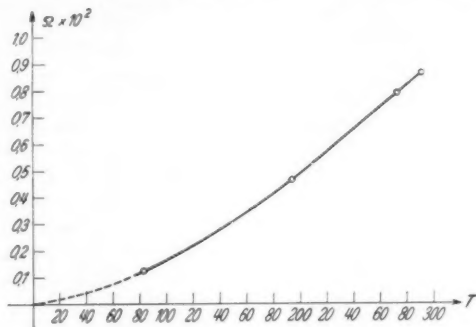


Fig. 7

Rändern ausgezackt. Das spezifische Leitvermögen ließ sich deshalb nicht bestimmen. Für den TK. zwischen 20 und  $-78,9^\circ \text{C}$  ergab sich  $\alpha = 0,0053$ , bezogen auf den Widerstand bei  $0^\circ \text{C}$ . Die Messungen waren genau reproduzierbar. Dieser TK. ergab sich für zwei verschiedene Proben des ersten Niederschlags aus sechs verschiedenen Meßreihen. Die eine Probe wurde in einer anderen Anordnung gemessen.

Der TK. zwischen  $+20$  und  $-188^\circ \text{C}$  war  $0,0044$ . Die Abnahme entspricht dem Verhalten der reinen ferromagnetischen Metalle.

Die Messungen an den spröden Proben waren ebenfalls gut reproduzierbar und ergaben  $\alpha_{-78,9}^{+20} = 0,0048$ .

Der kleinere Wert des TK. läßt sich erklären, wenn man eine Verunreinigung der spröden Probe durch Wasserstoff annimmt.

23. Nach Westgren und Phragmén<sup>1)</sup> bleibt die  $\gamma$ -Phase, deren Stabilitätsbereich ja oberhalb  $1191^{\circ}\text{C}$  liegt, bei dem elektrolytisch hergestellten Mn nicht dauernd erhalten, sondern wandelt sich im Laufe von einigen Wochen in  $\alpha$ -Mn um.

Es wurde eine Probe des Elektrolytmangans (erster Niederschlag) in der elektrischen Meßanordnung, also im Vakuum, belassen und von Zeit zu Zeit  $\alpha$  und der Widerstand bestimmt. Wenn die Phase sich änderte, dann war nach unseren bisherigen Messungen auch eine Änderung des TK. und wahr-

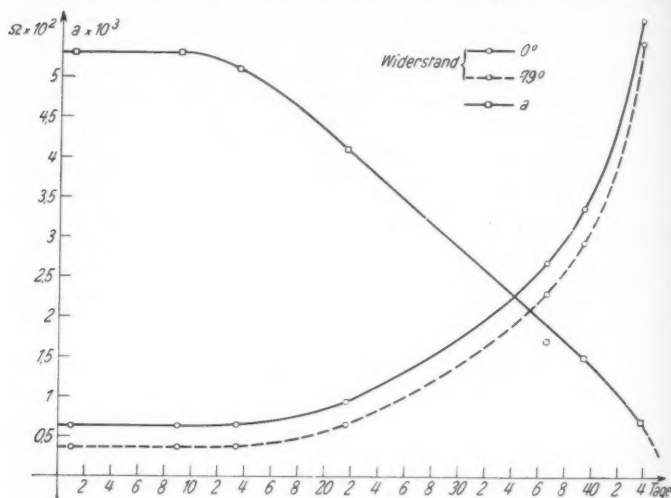


Fig. 8

scheinlich auch des elektrischen Leitvermögens zu erwarten. Diese Veränderungen mußten gleichzeitig einen Einblick geben, mit welcher Geschwindigkeit die Umwandlung vor sich geht.

Eine Abnahme des TK. und eine Zunahme des Widerstands wurde erst am 13. Tage nach der Herstellung der Probe beobachtet, nachdem bis dahin beide Größen konstant geblieben waren. Wie die Veränderung des Widerstands im Laufe der Zeit erfolgte, ist aus Fig. 8 zu ersehen. Dort ist der elektrische Widerstand als Funktion der Umwandlungszeit (Tage) aufgetragen, und zwar für  $0^{\circ}$  und  $-79^{\circ}\text{C}$ . Beide

1) A. Westgren u. G. Phragmén, a. a. O.

Kurven zeigen einen vollkommen glatten Verlauf mit nahezu konstantem Ordinatenabstand. In Fig. 9 kommt dieses Verhalten noch auffälliger zur Geltung. Hier ist die Zeit Parameter. Die Widerstand-Temperatur-Kurven, hier als Geraden eingezeichnet, laufen nahezu parallel zueinander. Der ursprüngliche Widerstand des reinen  $\gamma$ -Mn wird bei der Umwandlung in die  $\alpha$ -Phase um einen temperaturunabhängigen Zusatzwiderstand vermehrt. Man wird dadurch an das Verhalten einer metallischen Mischkristallreihe erinnert, bei der die eine Komponente stark überwiegt. Hier gilt bekanntlich die Matthiessensche Regel  $\rho = F(T) + \zeta$ , d. h. zu dem Widerstand  $\rho = F(T)$  des reinen Metalls tritt ein Zusatzwiderstand hinzu, der von der Temperatur unabhängig ist.

Man könnte nun annehmen, daß die Probe in jedem Zeitpunkt der Umwandlung selbst einen einheitlichen Mischkristall darstellt. Dieser müßte durch Zusatz fremder Metallatome zu dem  $\gamma$ -Mn entstehen. Eine solche Deutung ist nicht möglich. Der Zusatzwiderstand strebt bei einem Mischkristall einem Maximum zu, um dann wieder abzunehmen, während er in dem hier beobachteten Falle dauernd wächst. Außerdem beobachteten Westgren und Phragmén in ihren Röntgen-diagrammen für das Elektrolyt-Mn ( $\gamma$ -Mn) nach einiger Zeit das Hinzukommen neuer diffuser, aber kräftiger Linien, die dem  $\alpha$ -Mn angehören. Beide Gitter treten während der Umwandlung nebeneinander auf.

Diese Tatsache führt zu einer zweiten Deutungsmöglichkeit unserer Messungen: Die Probe stellt während der Um-

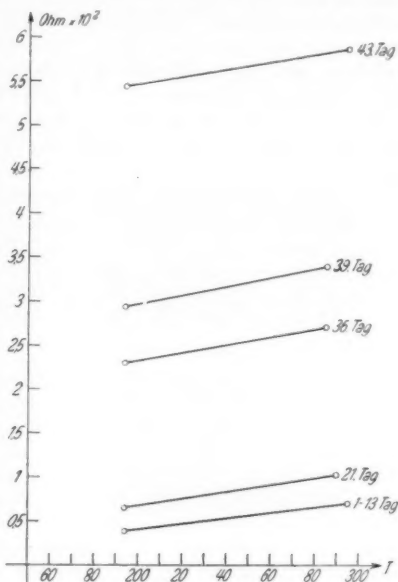


Fig. 9

wandlung ein Gemenge von  $\gamma$ - und  $\alpha$ -Mn dar. Dem gut leitenden  $\gamma$ -Mn mit seinem hohen TK. wird ein Fremdmittel beigemischt, das sehr schlecht leitet, und dessen Widerstand kaum von der Temperatur abhängig ist. Die Messungen erlauben aber auch auf Grund der Gültigkeit der Matthiessenschen Regel eine Aussage über dieses Fremdmittel — nämlich das  $\alpha$ -Mn —, das bei der Umwandlung in demselben Maße entsteht, wie das  $\gamma$ -Mn verschwindet. Kämen die auftretenden Widerstandserhöhungen durch den teilweisen Ersatz des Leiters durch einen Nichtleiter zustande — Extremfall: Löcher in der Probe — dann würde dadurch der TK. des Metalls nicht geändert, weil er von der geometrischen Form der Probe unabhängig ist. Mit der Widerstandszunahme fände gleichzeitig eine Zunahme der Widerstandsdifferenz zwischen zwei festen Temperaturen statt. Ersetzt man das Metall zunehmend durch einen Leiter, dessen Widerstand überhaupt nicht von der Temperatur abhängt, so müßte die Widerstandsdifferenz abnehmen, um schließlich gleich Null zu werden. Die Widerstandsdifferenz bleibt dagegen bei der Umwandlung konstant, wenn das Metall durch einen Mischkristall eben dieses Metalls ersetzt wird. Deshalb scheint es nötig, das  $\alpha$ -Mn als einen Mischkristall der  $\gamma$ -Phase aufzufassen. Wie man sich das Zustandekommen dieses Mischkristalls erklären kann, wird später erörtert werden.

24. Ganz genau finden wir die Matthiessensche Regel nicht erfüllt, was auch nicht zu erwarten ist, da die Widerstände von Gemengen nicht genau der Mischungsregel folgen. Die Abweichungen werden am größten, wenn beide Komponenten des Gemenges zu ungefähr gleichen Teilen vorhanden sind. In dem hier beobachteten Fall nimmt die Differenz der Widerstände mit steigendem Gehalt von  $\alpha$ -Mn zu (vgl. Fig. 8), um dann wieder abzunehmen, was allerdings nur durch einen Punkt gestützt ist. Bis zur restlosen Umwandlung der Probe in  $\alpha$ -Mn konnten die Verhältnisse leider nicht elektrisch messend verfolgt werden, weil die Widerstände schwankend wurden, nachdem ein Wert des TK. von 0,0007 erreicht war. Wie sich zeigte, war die sonst vollkommen zusammenhängende Probe an der Stelle zersprungen, an der die eine Potentialschraube aufsaß.

Nachstehend sind die Einzelmessungen zusammengestellt.

Trägt man den TK. als Funktion der Umwandlungszeit auf (Fig. 8), so ist die Neigung der durch die Meßpunkte gezogenen Kurve ein Maß für die Umwandlungsgeschwindigkeit.

Zeit	$\alpha$	$w_0$	$w_0 - w_{-70}$
1.—9. Tag	0,0053	0,0062 <sub>s</sub>	0,0027
13. "	0,0051	0,0063 <sub>s</sub>	0,0025
21. "	0,0041	0,0094 <sub>0</sub>	0,0029
36. "	0,0017	0,026 <sub>s</sub>	0,0038
39. "	0,0015	0,033 <sub>i</sub>	0,0041
43. "	0,0007	0,057 <sub>s</sub>	0,0032

Nachdem die Umwandlung begonnen hat, wird die Umwandlungsgeschwindigkeit nahezu konstant.

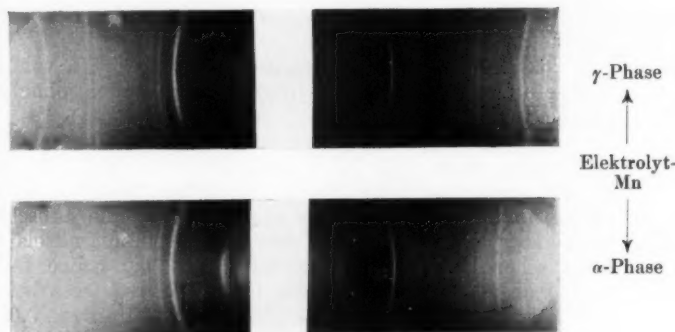


Fig. 10

Die beim Beginn der Messung weiche und biegsame Mn-Probe war zum Schluß hart und spröde. Wie die Röntgenaufnahme zeigte, hatte sich das  $\gamma$ -Mn restlos in die  $\alpha$ -Phase umgewandelt. Dabei ist das Material sehr feinkristallin geworden, was aus den breiten Linien des Diagramms hervorgeht. Fig. 10 gibt eine Aufnahme des Mn vor und nach der Umwandlung.

#### Untersuchungen an reinem $\beta$ -Mangan

25. *Herstellung der Proben.* Nach brieflicher Mitteilung von Miß Gayler war es gelungen, reines  $\beta$ -Mn herzustellen, indem das Material von einer Temperatur zwischen 900 bis 1000° C aus abgeschreckt wurde. Ähnliches berichtet Wheeler<sup>1)</sup>.

Zu unseren Versuchen wurde ein Hochfrequenzofen benutzt, der schon von Ochsenfeld beschrieben worden ist.

1) M. A. Wheeler, Phys. Rev. 41. S. 331. 1932.

Allerdings standen jetzt nur noch vier Ölkondensatoren von je 37200 cm zur Verfügung, während Ochsenfeld noch fünf verwenden konnte. Die Leistungsfähigkeit der Anlage wurde aber dadurch wesentlich erhöht, daß die Spannungselektroden, zwischen denen sich die Unterbrecherscheibe bewegt, auf eine Platte aus gut isolierendem Fibranit montiert wurden. Die Schmelztemperatur des Mn konnte in einer Zeit von 10 Min. leicht erreicht werden, wobei der 10 kW-Generator nur mit 20 Amp. — das entspricht einer Leistung von etwa 2 kW — beansprucht zu werden brauchte. Die Energieaufnahme durch die Proben ist so gering, daß wie bei Ochsenfeld auf die indirekte Heizung mittels eines Wolframrohrs zurückgegriffen werden mußte.

26. Die vorher geschmolzenen Proben sollten von einer Temperatur um 1000° C aus abgeschreckt werden, ohne dabei an die Luft zu kommen.

Es wurde eine Versuchsanordnung ausgearbeitet, wie sie im Prinzip schon von Néel<sup>1)</sup> angegeben wurde. Der Tiegel, in dem sich das abzuschreckende Metall befindet, wird an einem dünnen Draht aufgehängt. Sobald die Abschrecktemperatur erreicht ist, wird der Aufhängedraht mittels eines elektrischen Stromes durchgebrannt, und die Probe fällt in ein Ölbad, das sich am Boden des Versuchsgefäßes befindet.

Unser Aufhängedraht aus Eisen oder Platin hatte 0,05 mm Durchmesser. An dem Schmelztiegel ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ , Höhe 3 cm, Durchmesser innen 5 mm, außen 8 mm) wurde mittels Schellen aus Eisen- und Molybdändraht ein Henkel aus Mo-Draht (Durchmesser 0,2 mm) befestigt. Die Stromzuführungen für den Aufhängedraht waren isoliert durch den Kupferdeckel des Versuchsgefäßes hindurchgeführt. Die Probe hing an diesem Deckel.

Fig. 11 zeigt einen schematischen Schnitt durch die gesamte Apparatur, Fig. 11a einen Querschnitt durch die Tiegelzone. Damit der W-Heizring (Länge 10 cm, Durchmesser innen 1,6 cm, außen 2 cm) keine Wärme an das Abschreckbad abgibt, wurde er auf ein Porzellanrohr von 9 cm Länge (Durchmesser innen 1,6 cm, außen 2,1 cm) gestellt und dieses auf eine Messingplatte, die unten in das Quarzrohr eingekittet war.

Das Abschreckbad (Paraffinöl) befand sich in einem wassergekühlten Becher aus Messing, der mittels eines Schliffes an die Röhre angesetzt werden konnte. Nach dem jeweiligen

1) L. Néel, *Ann. de Phys.* 18. S. 5. 1932.



Abschrecken ließ sich die Probe leicht entfernen, ohne daß an dem Aufbau der Apparatur etwas geändert zu werden brauchte.

Der Ofen wurde mittels einer zweistufigen Quecksilberdiffusionspumpe gut evakuiert. Keine der Schmelzen war oxydiert. Ihre Temperatur wurde pyrometrisch bestimmt.

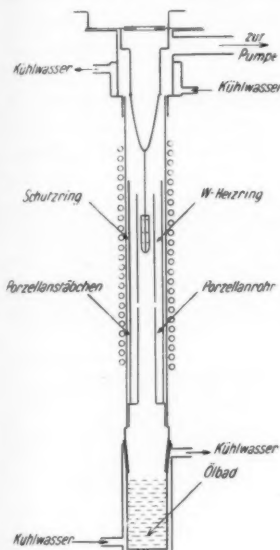


Fig. 11

27. Vorversuche mit unreinem Mn. Vorversuche mit unreinem Mn, das sich bereits in der  $\beta$ -Phase befand, ergaben auch nach dem Umschmelzen, selbst ohne Abschreckung,  $\beta$ -Mn. Bei größerem Gehalt an Aluminium ist — wie bekannt — die  $\beta$ -Phase auch bei Zimmertemperatur stabil. Das vorliegende Material enthielt neben Eisen (etwa 2%) und  $\text{SiO}_2$  noch 1,8% Al.

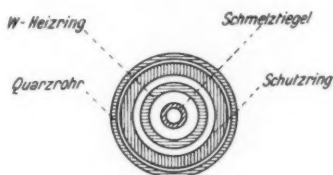


Fig. 11a

Zwei derartige unreine Proben gaben  $\alpha_{-196}^{+150} = 0,0008_0$ ,  $\alpha_{-196}^{+150} = 0,0009_7$  und  $\sigma_0 = 0,56 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$  bzw.  $\sigma_0 = 0,50 \cdot 10^4$ .

Die Drähte für die Stromzuführung und die Potentialabnahme waren mit Woodschem Metall an die Stäbe angelötet.

Bridgman<sup>1)</sup> hat für seine Proben einen TK. von 0,00078 gefunden (Ziffer 2). Es wird sich wohl auch dabei um  $\beta$ -Mn (unrein) gehandelt haben.

1) P. W. Bridgman, a. a. O.

**Versuche mit reinem Mangan**

28. Reines Mn-Gayler, von  $1100^{\circ}\text{C}$  aus abgeschreckt, ergab einen zusammenhängenden Stab von  $\beta\text{-Mn}$  mit 0,48 cm Durchmesser und 1,2 cm Länge. Leider war die Probe innen teilweise hohl, weswegen das Leitvermögen nicht bestimmt werden konnte.

Das Material war hart — es ritzte Glas —, aber längst nicht so spröde wie das  $\alpha\text{-Mn}$ . Es ließ sich nur schwer im Achatmörser pulvern.

Für die elektrischen Messungen wurden die Drähte wie bei dem unreinen Mn an die Proben angelötet, was hier beim  $\beta\text{-Mn}$ , im Gegensatz zum  $\alpha\text{-Mn}$ , verhältnismäßig gut gelang. Der TK. war  $\alpha^{+20^{\circ}}_{-79^{\circ}} = 0,0012_{\text{s}}$ . Dieser Wert blieb nicht erhalten. Nach 4 Wochen (während deren nicht gemessen werden konnte) hatten sich am einen Ende der Probe die Drähte abgelöst. Die Probe war dort sehr spröde geworden. Die Röntgenaufnahme ergab, daß eine teilweise Umwandlung in  $\alpha\text{-Mn}$  stattgefunden hatte. Aus den Intensitäten der Linien konnte geschätzt werden, daß in dem entstandenen Gemenge beide Phasen ( $\alpha$  und  $\beta$ ) zu ungefähr gleichen Teilen vorhanden waren. Das stimmt auch mit dem elektrischen Befund überein. In demselben Temperaturgebiet wie oben betrug jetzt  $\alpha = 0,0008_{\text{s}}$ .

28. *Herstellung von  $\gamma\text{-Mn}$  durch Abschrecken.* Eine zweite Probe wurde von einer Temperatur aus abgeschreckt, die über  $1200^{\circ}\text{C}$  lag. Dabei wurde teilweise die  $\gamma$ -Phase festgehalten, doch war schon ein Teil  $\beta\text{-Mn}$  beigemischt. Genau wie das elektrolytisch hergestellte Mn war die Probe weich und dehnbar, ließ sich mit der Schere schneiden, dagegen nicht im Achatmörser pulvern.

Daß es uns gelang, die  $\gamma$ -Phase aus reiner Schmelze durch Abschrecken festzuhalten, mag daher rühren, daß wir im Vakuum abschreckten. Persson<sup>1)</sup> sagt in seiner Arbeit nichts darüber aus, wie bei dem Abschrecken der Proben verfahren wurde. Er hat bei Cu-Mn-Legierungen, die bis zu 97% reines Mn (Gayler) enthielten, die  $\gamma$ -Phase durch Abschrecken festhalten können. Diese hochprozentigen Mn-Legierungen waren weich und verformbar, wenn sie sich in der  $\gamma$ -Phase befanden. Es wurden dort auch reine Manganproben bei hohen Temperaturen auf ihre Härte untersucht. Bei  $1191^{\circ}\text{C}$  — d. h. beim Umwandlungspunkt  $\beta\text{-}\gamma$  — wurden die vorher harten Proben plötzlich weich und schmiedbar genau wie das Elektrolyt-Mn.

1) E. Persson, a. a. O.

Unsere Probe ergab sofort nach der Herstellung  $\alpha_{-79}^{+18} = +0,0042$ . Der Wert liegt, wie zu erwarten, zwischen den Werten, die für das reine  $\gamma$ - und  $\beta$ -Mn gemessen wurden.

Die Probe wurde für die elektrischen Messungen in ein Hartgummibänkchen eingespannt. Die Stromzuführung besorgten kleine, gegen den Mn-Stab gepreßte Metallfedern. Zur Abnahme des Potentials dienten schmale Metallfedern.

29. *Verwandlung von  $\gamma$ - in  $\beta$ -Mn.* 48 Std. nach der Herstellung wurde der Stab erneut untersucht. Er sollte an den Enden zwecks Wärmeleitungsmessungen glattgeschnitten werden. Das war nicht mehr möglich. Die Probe war hart geworden und ließ sich nur noch abschleifen. Diese Schlißflächen waren

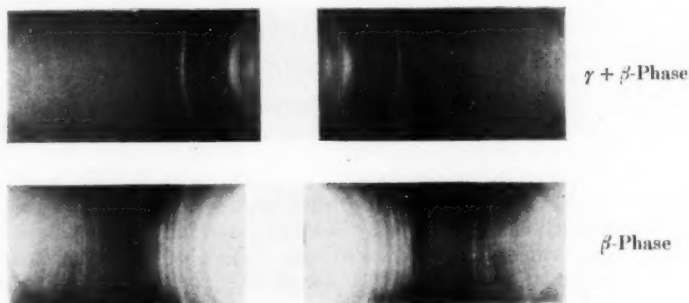


Fig. 12

hoch metallisch glänzend. Das Material hatte sich, wie die Röntgenaufnahme (Fig. 12) ergab, in  $\beta$ -Mn umgewandelt. Hätte der Stab aus  $\alpha$ -Mn bestanden, so wäre das Abschleifen nicht möglich gewesen.

Die Messungen der Widerstände erfolgten am Kompen-sationsapparat. Der TK. betrug jetzt  $\alpha_{-79}^{+20} = 0,0013_6$ .

Dieser Wert ist etwas größer als der für die erste  $\beta$ -Mn-Probe (Ziffer 28) gemessene. Da dort aber schon möglicher-weise etwas  $\alpha$ -Mn enthalten war — zwei sehr schwache Linien im Diagramm könnten dem  $\alpha$ -Mn zugeordnet werden —, wird wohl der zuletzt gemessene Wert dem des reinen  $\beta$ -Mn ent-sprechen. In tieferer Temperatur ergab sich  $\alpha_{-183}^{-79} = 0,0014_5$ . Der Unterschied zwischen den beiden Werten ist gering und braucht nicht reell zu sein.

30. Der bei der  $\gamma$ - $\beta$ -Umwandlung eingetretenen Verkleinerung von  $\alpha$  im Verhältnis 3,06:1 entsprach eine Verkleinerung des LV. im Verhältnis 3,08:1. Für dieses Gemenge von  $\gamma$ - $\beta$ -Mn gilt also wieder die Matthiessensche Regel, wenn man das aus zwei Meßpunkten schließen darf. Extrapoliert man aus den Messungen auf die Verhältnisse zwischen reinem  $\gamma$ - und  $\beta$ -Mn, so kommt man zu einem analogen Ergebnis wie bei  $\gamma$ - und  $\alpha$ -Mn: die TK. des reinen  $\gamma$ - und  $\beta$ -Mn verhalten sich umgekehrt wie ihre Widerstände. Die  $\beta$ -Phase stellt mithin einen Mischkristall des  $\gamma$ -Mn dar.

Das durch Abschrecken erhaltene  $\gamma$ -Mn erwies sich — vielleicht infolge des schon vorhandenen  $\beta$ -Keims — als viel instabiler als die durch Elektrolyse hergestellten Proben. Eine weitere Verwandlung der Probe in  $\alpha$ -Mn konnte nicht festgestellt werden.

#### Ergebnis der elektrischen Messungen

31. Die drei verschiedenen Modifikationen besitzen, wie sich aus den Messungen ergibt, einen wesentlich verschiedenen TK. des elektrischen LV.

Für  $\gamma$ -Mn wurde der selbst für reine Metalle verhältnismäßig hohe Wert von 0,0053 gefunden. Auch Valentiner und Becker<sup>1)</sup> haben auf Grund ihrer Messungen an Mn-Cu-Legierungen auf den TK. des reinen<sup>2)</sup> Mn extrapoliert und finden  $\alpha = 0,0039$ . Das spezifische elektrische LV. wird zu  $3,2 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$  geschätzt. Dazu sagen die Verfasser: Es handelt sich dabei um „ $\gamma$ -Mn, wenn  $\beta$ - und  $\gamma$ -Mn verschiedene Leitvermögen besitzen“. Bei unseren Messungen konnte das spezifische LV. des  $\gamma$ -Mn nicht bestimmt werden. Man kann aber aus dem beobachteten TK. zusammen mit den von Valentiner und Becker angegebenen Werten auf das Leitvermögen des reinen  $\gamma$ -Mn folgendermaßen schließen: Angenommen, der gegen den des reinen  $\gamma$ -Mn kleine Wert des TK. von Valentiner und Becker komme auf Grund der Verunreinigungen durch einen von der Temperatur unabhängigen Zusatzwiderstand des reinen  $\gamma$ -Mn zustande. Dann verhalten sich die LV. des reinen und des unreinen  $\gamma$ -Mn wie ihre TK. Daraus ergibt sich für das reine  $\gamma$ -Mn  $\sigma = 4,3 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ .

1) S. Valentiner u. G. Becker, Ztschr. f. Phys. **80**, S. 735. 1933.

2) Dabei wird unter reinem Mn solches verstanden, das nicht mehr mit Cu legiert ist. Das verwandte Mn ist aber unreines Mn-Goldschmidt.

32. Für das unreine  $\beta$ -Mn ergab sich ein TK. von 0,0008 und als bester Wert für das LV.  $\sigma = 0,56 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ . Das reine  $\beta$ -Mn besaß einen TK. von 0,0013<sub>g</sub>. Dieser Wert ist kleiner als er sonst bei reinen Metallen beobachtet wird. Aus dem Verhältnis der TK. der reinen und der unreinen Probe kann man wieder auf das LV. der reinen  $\beta$ -Phase schließen, da das LV. der unreinen Probe bekannt ist. Es ist danach  $\sigma = 1 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$  für das reine  $\beta$ -Mn. Man kann aber auch dieselbe Berechnung zwischen dem reinen  $\gamma$ - und  $\beta$ -Mn ausführen, da ja die  $\beta$ -Phase einen Mischkristall des  $\gamma$ -Mn darstellen soll. Danach ist  $\sigma = 1,1 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ . Die beiden auf verschiedenen Wegen gewonnenen Werte für das LV. stimmen gut überein.

33. Das  $\alpha$ -Mn besitzt einen noch kleineren TK. als die  $\beta$ -Phase. Die besten Werte schwanken zwischen 0,00015 und 0,00019. Die Werte des LV. ließen sich annähernd bestimmen. Sie lagen (Ziffer 18) zwischen 0,1 und  $0,34 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ . Wenn unsere vorigen Betrachtungen über das spezifische LV. der  $\gamma$ - und  $\beta$ -Phase stimmen, können wir den großen Wert für das LV. sofort ausschalten. Das  $\alpha$ -Mn wurde als ein Mischkristall der  $\gamma$ -Phase aufgefaßt. Wir können mithin auf Grund der Matthiessenschen Regel die Beziehung zwischen den TK. und Leitfähigkeiten aufstellen. Dasselbe kann man auch zwischen dem  $\alpha$ - und  $\beta$ -Mn vornehmen. Als TK. des  $\alpha$ -Mn soll ein mittlerer Wert von 0,00017 angenommen werden. Dann wird

$$\sigma_{\gamma} = 4,4 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

und

$$\sigma_{\beta} = 1,1 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1},$$

wenn man setzt

$$\sigma_{\alpha} = 0,14 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}.$$

Leider waren bei dem reinen Mn nur diese Schätzungen des LV. möglich.

#### Deutung der Ergebnisse

34. Ein Unterschied in dem elektrischen Verhalten der Phasen eines reinen Metalls — wie er beim Mn beobachtet wurde — läßt sich nicht aus der Verschiedenheit der Gitter erklären. In der modernen Theorie des metallischen Zustands (Blochsche Theorie) findet man die Anschauung, daß die Metallelektronen sehr empfindlich gegen Symmetriestörungen des Gitters sind. Die Wahrscheinlichkeit der Streuung eines

Leitungselektrons ist danach nicht so sehr durch die Eigenschaften eines Atoms bedingt, mit dem das Elektron gerade zusammenstößt, als vielmehr durch die Natur des gesamten Kristallgitters. Die Theorie gibt aber keine Erklärung für die ungewöhnlich kleinen Werte des TK. und des spezifischen LV. beim  $\alpha$ - und  $\beta$ -Mn.

Das  $\gamma$ -Mn entspricht in seinem elektrischen Verhalten den reinen Metallen. Eine Analogie zu den Verhältnissen, wie sie beim  $\alpha$ - und  $\beta$ -Mn beobachtet wurden, findet man dagegen bei den reinen Metallen nicht, sondern nur bei gewissen Legierungen. Auch im Verlaufe der elektrischen Messungen wurden wir dazu geführt, das  $\alpha$ - und  $\beta$ -Mn als einen Mischkristall der  $\gamma$ -Phase aufzufassen. In ihrer Sprödigkeit und Härte erinnern diese beiden Phasen vielmehr an eine Legierung als an ein reines metallisches Element. Ein Mischkristall entsteht immer dann, wenn einem reinen Metall Atome eines bestimmten fremden Metalls — mit dem es mischungsfähig ist — beigemischt werden. Atome eines fremden Metalls werden dem  $\gamma$ -Mn bei der Umwandlung in die beiden anderen Phasen, wie sie beobachtet wurde, nicht zugesetzt. Es bleibt mithin für das Zustandekommen des Mischkristalls nur folgende Erklärung: Von den untereinander vollkommen gleichen Atomen der  $\gamma$ -Phase sondern sich eine oder mehr Atomsorten ab, die untereinander irgendwie verschieden sind, sobald das Mn in die  $\beta$ - bzw.  $\alpha$ -Phase übergeht.

35. Schon vor Beginn dieser Arbeit kam man auf einem ganz anderen Weg wie wir dazu, das  $\alpha$ - und  $\beta$ -Mn als eine Legierung anzusprechen. Nach der grundlegenden Arbeit von Westgren und Phragmén besitzen das  $\alpha$ -Mn mit 58 Atomen<sup>1)</sup> in der Elementarzelle und das  $\beta$ -Mn mit deren 20 ein Gitter, wie es sonst bei keinem Metall beobachtet wird. Trotz dieser großen Zahl von Atomen ist die Symmetrie der beiden Gitter kubisch raumzentriert. Das Gitter des  $\gamma$ -Mn (4 Atome in der Elementarzelle) ist dagegen das eines normalen Metalls.

Bradley und Thewlis<sup>2)</sup> haben sich auf Grund der sehr exakten Aufnahmen von Westgren und Phragmén noch einmal eingehend mit der Struktur des  $\alpha$ -Mn befaßt. Die Zahl der in der Riesenzelle enthaltenen Atome wird ebenfalls zu 58 berechnet. Eine Anordnung dieser Atome war nicht möglich, solange nur eine Atomsorte angenommen wurde. Die

1) Zuerst wurden 56 Atome angegeben. Diese Zahl ist später korrigiert worden.

2) A. J. Bradley u. J. Thewlis, Proc. Roy. Soc. London 115. S. 456. 1927.

Verf. bedurften vielmehr deren 4. Nach ihren Angaben werden die 58 Atome der Einheitszelle aufgeteilt in 2X-Atome, 8A-Atome, 24D<sub>1</sub>-Atome und 24D<sub>2</sub>-Atome. Über die Anordnung heißt es dabei wörtlich: „Die ganze Anordnung ist ein einziges körperzentriertes kubisches Gitter. Aber jeder Gitterpunkt wird durch eine Gruppe von 29 Atomen dargestellt. Diese Atomgruppen sind keineswegs chemische Moleküle oder ebensolche Gruppen.“ Es wird dann auch noch ein räumliches Bild dafür gegeben, an welchen Stellen die Atome innerhalb dieser Gruppen sitzen.

Bradley und Thewlis geben auch noch Auskunft darüber, wie man sich die Verschiedenheit der Atome erklären kann. Nach den Röntgenaufnahmen ist der Abstand nächst benachbarter Atome nicht konstant, sondern er schwankt zwischen den Werten 2,24 und 2,96 ÅE, d. h. also, die Atome müssen verschiedene Wirkungsbereiche besitzen. Darüber sagen die Autoren: „Diese Verschiedenheit der Atomdimensionen muß in enger Beziehung zu der Komplexnatur des Gitters stehen. Es mag vielleicht so erklärt werden, daß die Elektronen nicht gleichmäßig auf die einzelnen Atome verteilt sind, so daß manche ein Mehr, andere wieder ein Weniger an Elektronen besitzen. Das bedingt bei der  $\alpha$ -Mn-Struktur die Existenz einer größeren Verwandtschaft zu einer Verbindung als zu einem richtigen Element. Die beste Analogie zu einer solchen Struktur findet man in den Legierungen. Die Struktur von  $\gamma$ -Messing (Cu<sub>5</sub>Zn<sub>8</sub>)<sup>1)</sup> ist teilweise der des  $\alpha$ -Mn vollkommen gleich.“

36. Diese Untersuchungen von Bradley und Thewlis und die daraus folgenden Annahmen sind noch einmal interpretiert worden. Preston<sup>2)</sup> untersuchte die Struktur von reinem  $\alpha$ - und  $\beta$ -Mn (Mn-Gayler) sowohl nach der Debye-Scherrer-Methode an Pulvern als auch nach der Laueschen Methode und der Drehkristallmethode an Mn-Stücken, die nahezu Einkristalle waren. Er kommt für das  $\alpha$ -Mn zu demselben Ergebnis wie die zuvor genannten Autoren. Für die Abstände benachbarter Atome werden die dort errechneten Werte bestätigt.

Auch beim  $\beta$ -Mn lassen sich nach Preston die 20 Atome nicht in der Einheitszelle anordnen, wenn man nur eine Art von Atomen annimmt. Es bedarf vielmehr zweier Arten, und zwar sind in der Elementarzelle 12 und 8 je untereinander

1) Das Gitter von  $\gamma$ -Messing ist kubisch raumzentriert mit 52 Atomen in der Elementarzelle.

2) G. D. Preston, Phil. Mag. 5. S. 1199. 1928.



gleiche Atome enthalten. Die Verschiedenheit der Atome kann man sich wie beim  $\alpha$ -Mn durch einen Unterschied in der Elektronenzahl erklären. Die Abstände benachbarter Atome schwanken zwischen 2,365 und 2,67 Å. Der kleinste Abstand ist hierbei größer als der entsprechende Wert beim  $\alpha$ -Mn. Das stimmt nach Preston gut damit überein, daß die Dichte des  $\beta$ -Mn kleiner ist als die des  $\alpha$ -Mn.

Die röntgenographischen Untersuchungen führen zu demselben Ergebnis wie unsere elektrischen Messungen. Die Gleichwertigkeit aller Atome eines reinen Metalls, wie man sie sonst aus vernünftigen Gründen in der Theorie des metallischen Zustands annimmt, ist danach bei der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Phase des reinen Mn nicht annehmbar.

#### Magnetische Beobachtungen

37. Die Massensuseptibilität von reinem Mn-Gayler bestimmte Wheeler<sup>1)</sup> zu:  $\alpha$ -Mn:  $9,60 \cdot 10^{-6}$  und  $\beta$ -Mn:  $8,80 \cdot 10^{-6}$ . Ferromagnetismus wurde nicht beobachtet. Die von uns hergestellten Proben eigneten sich nicht zu magnetischen Messungen. Qualitativ konnten wir aber Ochsenfelds Befund bestätigen, daß reines  $\gamma$ -Mn ebenfalls nicht ferromagnetisch ist. Kleine Proben Mn wurden bei uns, an einem Faden aufgehängt, in dem inhomogenen Feld eines starken Elektromagneten vor und nach der  $\gamma \rightarrow \alpha$ -Mn-Umwandlung schätzungsweise mit der gleichen Stärke angezogen.

Es wurde dann noch Elektrolyt-Mn in einer Stickstoffatmosphäre bei 500–600° C getempert, da festgestellt werden sollte, in welcher Richtung der T.K. durch den Einbau des Stickstoffs verändert wird. Leider zerbrachen dabei die in die elektrische Meßanordnung eingespannten Proben in kleine Stücke. Die Proben wurden zu spröde, um sich noch untersuchen zu lassen. Bei dem Tempern hatte sich — wie die Röntgenaufnahmen zeigten — das Elektrolyt-Mn sofort in  $\alpha$ -Mn umgewandelt, bevor mit dem Einbau des Stickstoffs begonnen wurde. Eine Probe war nach kurzem Tempern schon ferromagnetisch geworden, während sie noch die  $\alpha$ -Phase zeigte. Durch weiteren Einbau von Stickstoff wurde die Probe stärker ferromagnetisch — sie wurde von einem kleinen Hufeisenmagneten stark angezogen — und ihr Gitter hatte sich in eine Phase umgewandelt, wie sie für die Mn-Stickstoff-Legierungen charakteristisch ist.

1) M. A. Wheeler, a. a. O.

# Reflexionsmessungen an $\alpha$ -Manganschichten

38. Die durch Verdampfung hergestellten Spiegel waren sehr gut für optische Reflexionsmessungen geeignet. Solche wurden dann auch mit einem Spaltmikrophotometer vorgenommen, das uns von der Firma Leitz freundlichst zur Verfügung gestellt war. Die Beschreibung des Photometers ist von Berek<sup>1)</sup> gegeben worden.

Die Eichung des Photometers mittels einer senkrecht zur optischen Achse geschnittenen Quarzplatte wurde für die drei benutzten Farbfilter — rot, grün, gelb — vorgenommen. Die Wellenlängen der Farbfilter betrugen: Rot: 6320 ÅE; Gelb: 6010 ÅE; Grün: 5320 ÅE. Dabei gelten die angegebenen Zahlen wie üblich für die optischen Schwerpunkte der Filter. Die Werte für das Reflexionsvermögen der Quarzplatte wurden der zitierten Arbeit von Berek entnommen.

Tabelle 2

Niederschlag Nr.	Reflexionsvermögen		
	rot in %	gelb in %	grün in %
37	53	50	47
51	52	48	47
52	52	49	46
53	54	47	—
54	54	48	46
55	51	47	44
57	49	47	44
58	52	51	49
60	52	50	46

Bei großem Reflexionsvermögen der Substanz werden die Messungen ungenau. Trotzdem weichen die bei den einzelnen Spiegeln gefundenen Werte nicht viel voneinander ab (Tab. 2). Das Reflexionsvermögen nimmt vom Rot zum Violett hin ab, wie beim Silber, das allerdings für das rote Farbfilter ein Reflexionsvermögen von 73% hat.

## Zusammenfassung

1. Die drei Phasen des Mangans wurden rein dargestellt.

a) Rissefreie Schichten von  $\alpha$ -Mn wurden bei der Verdampfung reinen Mangans (Gayler) im Hochvakuum erhalten.

b) Zu meßbaren Proben von reinem  $\beta$ -Mn gelangte man durch Abschrecken von Mn-Schmelzen von einer Temperatur um 1100° C.

1) M. Berek, Ztschr. f. Kristallogr. 77. H. 1—2. 1931.

c) Bei der Elektrolyse einer wäßrigen Lösung von Mn-Chlorid und Ammoniumchlorid wurden kleine Bleche von  $\gamma$ -Mn erhalten, die sich für die elektrischen Untersuchungen gut eignen.

2. Die dargestellten reinen Proben des  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Mn wurden auf ihre elektrische Leitfähigkeit untersucht. Für den Temperaturkoeffizienten zwischen 20 und  $-78,9^\circ\text{C}$  ergaben sich dabei die folgenden Werte:

$$\alpha\text{-Mn: } \alpha = 0,0001_7,$$

$$\beta\text{-Mn: } \alpha = 0,0013_6,$$

$$\gamma\text{-Mn: } \alpha = 0,0053.$$

Das spezifische elektrische Leitvermögen der drei Phasen konnte auf Grund der beobachteten T.K. im Verein mit vorliegenden Leitfähigkeitsmessungen an unreinem Mn geschätzt werden. Danach ist:

$$\sigma_\alpha = 0,14 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1},$$

$$\sigma_\beta = 1,1 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1},$$

$$\sigma_\gamma = 4,4 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$$

für  $0^\circ\text{C}$ .

3. Die elektrischen Messungen führten dazu, die  $\alpha$ - und die  $\beta$ -Phase als Mischkristalle des reinen  $\gamma$ -Mn aufzufassen. Diese Mischkristalle können zustandekommen, indem sich von den einheitlichen Atomen im  $\gamma$ -Mn eine oder mehrere Atomsorten absondern, die untereinander verschieden sind, sobald das Mn in die  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Phase übergeht. Die Verschiedenheit der Atome kann auf einer ungleichmäßigen Besetzung mit Elektronen beruhen.

4. Über die magnetischen Eigenschaften des reinen Mangans werden einige Versuche mitgeteilt.

5. Das optische Reflexionsvermögen der durch Verdampfung hergestellten  $\alpha$ -Manganschichten wurde bestimmt.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Marburg ausgeführt. Die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft stellte die Röntgenapparatur, die Helmholtz-Gesellschaft die Gaedediffusionspumpe zur Verfügung, wofür ich an dieser Stelle danken möchte. Herrn Prof. Grüneisen danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein förderndes Interesse während ihrer Durchführung.

Marburg/L., Physikalisches Institut.

(Eingegangen 28. August 1934)

**Über die Temperaturabhängigkeit  
der wahren spezifischen Wärme des Nickels**

**Von Erhard Ahrens**

(Mit 7 Figuren)

**Einleitung**

Die spezifische Wärme eines Ferromagnetikums hat in der Umgebung der magnetischen Umwandlungstemperatur eine ferromagnetisch bedingte Anomalie. Weit unterhalb der Umwandlungstemperatur steigt sie stark an, erreicht bei einer kritischen Temperatur, die wir im folgenden als Curiepunkt (CP.) bezeichnen wollen, ein scharfes Maximum und fällt oberhalb dieses CP. innerhalb eines kleinen Temperaturbereiches auf den „normalen“ Wert ab. Seitdem Weiss<sup>1)</sup> diesen Zuwachs der spezifischen Wärme deutete als die zur Zerstörung des Ferromagnetismus benötigte Energie und ihn in Zusammenhang brachte mit dem Temperaturverlauf der Magnetisierung, ist diese Anomalie mehrfach untersucht worden. Während die älteren Messungen<sup>2)</sup> meist die *mittlere* spezifische Wärme liefern, muß zur genaueren Untersuchung des Effektes die *wahre* spezifische Wärme direkt gemessen werden, die sich am CP. innerhalb weniger Grade stark ändert. Solche Messungen sind ausgeführt worden u. a. an Nickel und Heuslerischen Legierungen von Sucksmith und Potter<sup>3)</sup>, an Eisen und Nickel von Klinkhardt<sup>4)</sup>, an Nickel von Lapp<sup>5)</sup>, an dem ferromagnetischen Mangan-Arsen von Bates<sup>6)</sup>.

Im allgemeinen Verlauf stimmen die Messungen qualitativ mit den Aussagen der Weiss'schen Theorie überein; die quantitativen Beziehungen sind meist nicht gut erfüllt.

1) P. Weiss, Journ. de Phys. 7. S. 249. 1908.

2) Vgl. P. Weiss, A. Piccard u. A. Carrard, Arch. Sci. Phys. Nat. 42. S. 387. 1917; 43. S. 113 u. 199. 1918; A. Dumas, Arch. Sci. Phys. Nat. 27. S. 352 u. 493. 1909.

3) H. Potter, Proc. Roy. Soc. A 112. S. 157. 1926.

4) H. Klinkhardt, Ann. d. Phys. 84. S. 167. 1927.

5) E. Lapp, Ann. d. Phys. [5] 12. S. 442. 1929.

6) L. F. Bates, Proc. Roy. Soc. A 117. S. 680. 1928.

Während Weiss, Piccard und Carrard, wie auch Lapp bei Nickel einen sehr steilen Abfall der spezifischen Wärme oberhalb des CP. finden, erstreckt sich das Gebiet des Abfalls bei Sucksmith und Potter über einen größeren Bereich. Klinkhardt findet einen sehr langsamen kontinuierlichen Abfall vom Maximalwert, allerdings sind seine Messungen wegen des sehr niedrigen CP. von etwa  $324^{\circ}\text{C}$  nicht unmittelbar mit denen der anderen Beobachter zu vergleichen. Der annähernd temperaturkonstante Wert der spezifischen Wärme weiter oberhalb des CP., der bei Lapp um einen Betrag von etwa einem Freiheitsgrad über dem normalen Debyeschen Wert liegt, wird von Sucksmith und Potter wesentlich höher gefunden. Es schien wünschenswert, durch neue Messungen weiteres Material zur Klärung dieser Fragen zu beschaffen.

Weiter interessierte insbesondere die Frage des Zusammenhanges der Anomalie der spezifischen Wärme mit der Anomalie des elektrischen Widerstandes der Ferromagnetika. W. Gerlach<sup>1)</sup> zeigte, daß der Temperaturverlauf des wahren Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes dem der spezifischen Wärme sehr ähnlich ist, und daß der ferromagnetische Anteil des elektrischen Widerstandes in einfacher Beziehung steht zu dem Quadrat der spontanen Magnetisierung, also der Größe, die nach der Weiss'schen Theorie auch für die spezifische Wärme maßgebend ist. Es war zu prüfen, ob beim direkten Vergleich der spezifischen Wärme mit dem Widerstandstemperaturkoeffizienten sich einfache quantitative Beziehungen angeben ließen.

#### Methode

Auf Anregung von Prof. W. Gerlach wurde eine neue Differentialmethode benutzt, die mit elektrischer Energiezufuhr arbeitet und das Verhältnis  $c_1(T)/c_2$  der spezifischen Wärme des Nickels  $c_1(T)$  bei den verschiedenen Versuchstemperaturen  $T$  zu der spezifischen Wärme  $c_2$  eines Vergleichsmaterials, das stets auf konstanter (Zimmer-)Temperatur gehalten wird, liefert. Dieses Verhältnis ist dann der spezifischen Wärme des Nickels proportional. Verbindet man diese Messung des Temperaturverlaufs mit einer Absolutmessung von  $c_1$  bei irgendeiner beliebigen Temperatur oder von  $c_2$ , so sind damit die Absolutwerte im ganzen untersuchten Temperaturbereich bekannt.

1) W. Gerlach, *Phys. Ztschr.* **33**, S. 953. 1932.

### Meßprinzip

Ein Draht, der vom Zeitmoment  $t = 0$  ab von einem konstanten elektrischen Strom durchflossen wird, erwärmt sich durch Joulesche Wärme solange zeitlich linear, bis sich die Wärmeverluste an die Umgebung bemerkbar machen. Durch geeignete Wahl der Stromstärke  $I$  kann man die anfängliche Erwärmungsgeschwindigkeit beliebig variieren. Mißt man die durch den Strom bewirkte (kleine) Temperaturerhöhung des Drahtes mit einem hinreichend trägheitsfreien Thermolement, das an dem Draht befestigt ist, so ist die erreichte Erwärmung nach  $t$  Sekunden, gemessen durch die Thermospannung  $e$  des Thermolementes:

$$e = \left( \frac{0,239 \cdot E \cdot I \cdot t}{m \cdot c} \right) \cdot \frac{de}{dT}$$

für hinreichend kleine Zeiten  $t$ , so daß die Wärmeverluste an die Umgebung zu vernachlässigen sind.

$I$ ,  $E$ ,  $m$  und  $c$  bezeichnen die Stromstärke, den Spannungsabfall längs des Drahtes, die Masse und die spezifische Wärme des Drahtes.  $de/dT$  ist die Thermokraft des Thermolementes, die aus der Eichkurve  $e = e(T)$  ermittelt wird.

Hat man zwei ähnliche Drähte  $D_1$  und  $D_2$  aus verschiedenem Material, deren entsprechende Größen durch die Indizes 1 und 2 bezeichnet sein mögen, so kann man durch geeignete Wahl der Stromstärken  $I_1$  und  $I_2$  erreichen, daß beide Drähte gleiche anfängliche Erwärmungsgeschwindigkeiten haben, so daß gilt:

$$\left( \frac{e}{t} \right)_1 = \frac{0,239 \cdot E_1 \cdot I_1 \cdot \left( \frac{de}{dT} \right)_1}{m_1 \cdot c_1} = \left( \frac{e}{t} \right)_2 = \frac{0,239 \cdot E_2 \cdot I_2 \cdot \left( \frac{de}{dT} \right)_2}{m_2 \cdot c_2},$$

oder

$$(1) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{E_1 \cdot I_1 \cdot \left( \frac{de}{dT} \right)_1}{E_2 \cdot I_2 \cdot \left( \frac{de}{dT} \right)_2} \cdot \left( \frac{m_2}{m_1} \right).$$

Wenn die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  in den beiden Drähten im selben Zeitmoment  $t = 0$  eingeschaltet werden, so kann man die Gleichheit der anfänglichen Erwärmungsgeschwindigkeiten dadurch beobachten, daß ein Differentialthermolement, dessen eine Lötstelle an  $D_1$ , dessen andere Lötstelle an  $D_2$  befestigt ist, in den ersten Sekunden nach Einschalten der Ströme keine Thermospannung liefert. Dann erlaubt (1) aus den elektrisch zugeführten Leistungen  $E \cdot I$  und der Thermokraft  $de/dT$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $c_1/c_2$  zu bestimmen.

Die Massen  $m_1$  und  $m_2$  sind konstant, ebenso  $c_2$  und  $(de/dT)_2$ , wenn der Vergleichsdraht  $D_2$  stets auf konstanter Temperatur gehalten wird.

Die wahre spezifische Wärme des Versuchsdrahtes ist dann

$$(2) \quad c_1 = \text{const.} \cdot \frac{E_1 \cdot I_1 \cdot \left(\frac{de}{dT}\right)_1}{E_2 \cdot I_2}.$$

### Apparatur

Die Anordnung ist in Fig. 1 gezeichnet. Der zu untersuchende Nickeldraht  $D_1$  von 2,5 mm Durchmesser befindet sich in der Achse eines elektrischen Ofens, der die Versuchstemperaturen liefert. Der Ofen ist bifilar bewickelt, hat eine Länge von 50 cm und etwa 25 mm lichte Weite und befindet sich in einem weiteren Glasrohr  $R_1$ , das auf 0,1—0,01 mm Hg evakuiert wird. Dadurch werden die Wärmeverluste des Ofens an die Umgebung, wie auch die des Drahtes an die Ofenwandung herabgesetzt. Der Nickeldraht ist im Ofen durch die Glaskörper  $G$  in seiner Lage gehalten. Zur Messung des Spannungsabfalles  $E_1$  sind an dem mittleren Teil des Drahtes im Abstand von 10 cm zwei Potentialdrähte  $P$  aus Silber, in der Mitte zwischen den Potentialdrähten mit sehr feiner Lötstelle das Thermoelement  $A_1$  zur Beobachtung der Erwärmungsgeschwindigkeit angelötet. Die Lötstelle  $A_2$  des Differentialthermoelementes (Fig. 2) befindet sich an dem Vergleichsdraht  $D_2$ , der stets auf Zimmertemperatur gehalten wird.  $D_2$  ist ein Konstantandraht von 2,5 mm Durchmesser, der sich in ähnlicher Anordnung wie  $D_1$  in einem zweiten, ebenfalls evakuierten Glasrohr  $R_2$  (ohne Ofen) befindet.

Als Material für den Vergleichsdraht war Konstantan gewählt, weil dessen Widerstand unabhängig von Schwankungen der Zimmertemperatur ist, so daß zur Leistungsmessung im Vergleichsdraht nur eine Strommessung nötig war. Die Berücksichtigung der Schwankungen der Zimmertemperatur auf die Thermokraft  $(de/dT)_2$  brachte eine Korrektur von einigen Promille. Die Versuchstemperatur des Nickel-

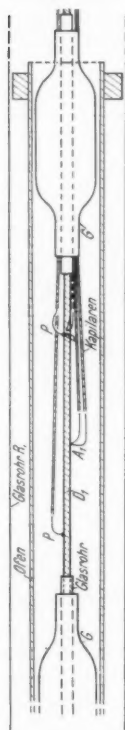


Fig. 1



drahtes  $D_1$  im Ofen wurde durch ein zweites Thermoelement  $B$  aus Silber-Konstantan gemessen, das in der Nähe des einen Potentialdrahtes an  $D_1$  angelötet war (vgl. Fig. 2). Das Differential-element  $A, A_2$  bestand aus 0,08 mm dickem Konstantan- und 0,05 mm dickem Kupferdraht. Die feinsten Lötstellen wurden dann erzielt, wenn der Versuchsdraht durch einen kräftigen Wechselstrom bis zur Schmelztemperatur des Lotes ( $\sim 700^\circ$ ) geglüht wurde. In späteren Versuchen bewährte sich auch das Verfahren, das Thermoelement in eine feine Bohrung im Versuchsdraht einzuführen und leicht zu vernieten. Zur Vermeidung von Inhomogenitäten längs des Versuchsdrahtes wurde er nachträglich durch einen Wechselstrom kräftig geglüht.

Die Thermoelemente wurden geeicht an den Siedepunkten von Wasser, Naphtalin, Benzophenon und Schwefel mit einem Wolffschen Kompensationsapparat. Die Eichkurve ließ sich meist gut durch eine Kurve dritten Grades darstellen, aus der die Thermokraft  $de/dT$  berechnet wurde.

Fig. 2 gibt die Schaltung der Stromkreise der Differentialanordnung wieder.

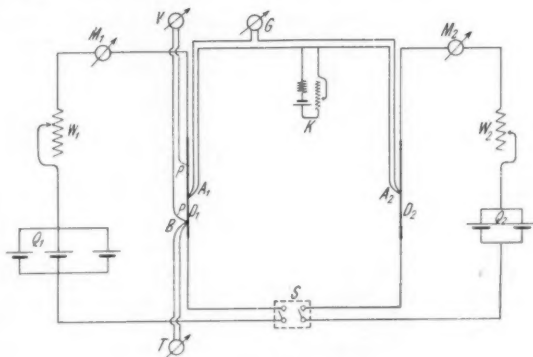


Fig. 2

$D_1$  ist der Versuchsdraht,  $D_2$  der Vergleichsdraht. Als Stromquelle dienen zwei oder drei parallelgeschaltete große 2 Volt-Akkumulatoren  $Q_1$  und  $Q_2$  in beiden Stromkreisen.  $M_1$  und  $M_2$  sind die Amperemeter zur Messung von  $I_1$  und  $I_2$ .  $W_1$  und  $W_2$  Regulierwiderstände,  $T$  und  $V$  sind Millivoltmeter zur Messung der Versuchstemperatur und des Potentialabfalls längs  $D_1$ . Das Galvanometer  $G$  war ein Instrument von Kipp und Zonen, das bei einem Gesamtwiderstand von 80 Ohm eine Stromempfindlichkeit von  $3 \cdot 10^{-9}$  Amp. hatte. Da meist mit dem gleichzeitigen Einschalten von  $I_1$  und  $I_2$  (durch den geeignet konstruierten Quecksilberschalter  $S$ ) eine kleine Gleichspannung im Galvanometerkreis auf-

trat, war es notwendig, ein schnellschwingendes Galvanometer zu verwenden, das sich sofort auf den neuen Nullpunkt einstellte und so eine ungestörte Beobachtung des durch die Erwärmung der Drähte hervorgerufenen Ausschlags ermöglichte. Diese Störspannung hat ihre Ursache darin, daß es fast nie gelingt, beide Drähte der Thermoelemente  $A_1$  und  $A_2$  an zwei Stellen von exakt gleichem Potential auf  $D_1$  und  $D_2$  anzubringen. Es genügt eine minimale Versetzung der beiden Thermoelementdrähte gegeneinander, um in dem empfindlichen Galvanometer einen größeren Gleichspannungsausschlag hervorzurufen. Wenn dieser störende Ausschlag größer als wenige Skalenteile war, wurde er in einigen Versuchen durch eine gleichzeitig eingeschaltete kleine Gegenspannung kompensiert, wobei als Kompensationsspannung ein sehr kleiner Bruchteil der Spannung an den Potentialdrähten benutzt wurde.

Die Kompensationsvorrichtung  $K$  dient dazu, die beim Anheizen des Ofens im Galvanometerkreise entstehende Thermospannung durch eine Gegenspannung zu kompensieren.

### Meßvorgang

Vor Beginn einer Meßreihe wurde zunächst der Strom  $I_1$  in  $D_2$  gesucht, mit dem eine günstige Erwärmungsgeschwindigkeit  $de/dt$  erreicht wurde. Bei gegebener Galvanometerempfindlichkeit ist sowohl eine zu kleine, wie auch eine zu große Erwärmungsgeschwindigkeit unbrauchbar. Es wurde meist mit einem  $I_2$  von 2,5—3 Amp. gearbeitet, was einer Temperaturerhöhung des Drahtes nach 10 Sek. von 0,3—0,5° entspricht.  $I_2$  wurde dann während einer Meßreihe nicht mehr geändert, so daß immer mit der gleichen Erwärmungsgeschwindigkeit, gemessen in Skalenteilen pro Sekunde, gearbeitet wurde. Sodann begann die eigentliche Messung: Nach Einstellen des Ofens auf die gewünschte Versuchstemperatur wird die Thermokraft durch  $K$  kompensiert. Ist Temperaturkonstanz erreicht, so wird durch den Schalter  $S$  gleichzeitig  $I_1$  und  $I_2$  für einige Sekunden eingeschaltet, worauf der Galvanometerausschlag im allgemeinen nach der einen oder anderen Seite zeitlich linear zu wandern beginnt. Dann wird  $I_1$  variiert, bis nach gleichzeitigem Einschalten von  $I_1$  und  $I_2$  der Galvanometerausschlag für die ersten etwa 4—8 Sek. in Ruhe bleibt. Jetzt ist Gleichheit der Erwärmungsgeschwindigkeiten erreicht; die zugehörigen  $I_1$  und  $I_2$  liefern mit Hilfe der Gl. (2) das Verhältnis der spezifischen Wärmen.

### Versuchsergebnisse

#### Platin

Zur Prüfung der Methode wurden zunächst Messungen an reinem Platin gemacht<sup>1)</sup>. In dem Temperaturbereich von

1) Für die leihweise Überlassung eines Platinstabes sind wir der Firma Heraeus zu Dank verpflichtet.

0—420°C verläuft die wahre spezifische Wärme des Platins fast linear mit der Temperatur. Platin ist nach der kalorimetrischen Methode mehrfach untersucht worden. Fig. 3 gibt eine Zusammenstellung unserer Messungen, auf mittlere spezifische Wärmen umgerechnet, mit den Daten einiger anderer

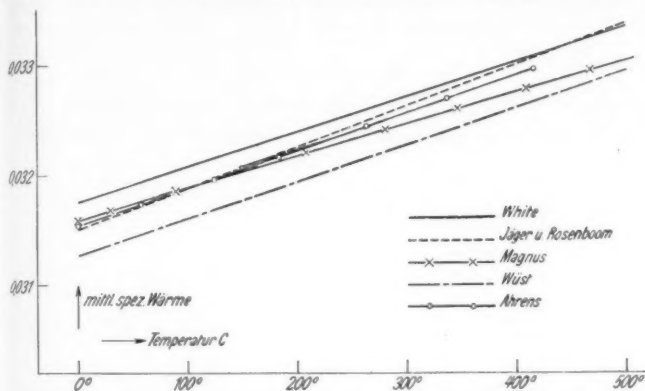


Fig. 3. Mittlere spezifische Wärme des Platins zwischen 0° und T°

Beobachter<sup>1)</sup>. Dabei wurde der Wert der spezifischen Wärme bei 0° dem Mittelwert der auf 0° extrapolierten Daten der genannten Autoren gleichgesetzt. Die Übereinstimmung ist innerhalb der Meßgenauigkeit befriedigend.

#### Nickel

Untersucht wurden zwei Nickelproben, ein technisch-reines, als „Reinnickel“ bezeichnetes Material von den Ver. Nickelwerken und ein von der Vakuumschmelze Heraeus zur Verfügung gestelltes „Carbonylnickel“ von sehr hohem Reinheitsgrad.

#### Reinnickel

Für das benutzte Material von 99,3—99,4% Reingehalt wurde folgende Durchschnittsanalyse angegeben:

Cu . . . . .	etwa 0,07 %
Fe . . . . .	etwa 0,20 %
Mn . . . . .	etwa 0,18 %
Si . . . . .	etwa 0,04 %

<sup>1)</sup> Vgl. Handb. d. Experimentalphysik, Bd. VIII, 1, Leipzig 1929, S. 181.

Das Ergebnis am Reinnickel ist in Fig. 4 Kurve A dargestellt. Da zur Bestimmung der zugeführten Leistung der Spannungsabfall  $E$  am Draht, sowie der Strom  $I$  gemessen werden, so ist damit gleichzeitig eine Berechnung des elektrischen Widerstandes  $W$  möglich (Kurve B). Der willkürliche Ordinatenmaßstab wurde für die spezifische Wärme so normiert,

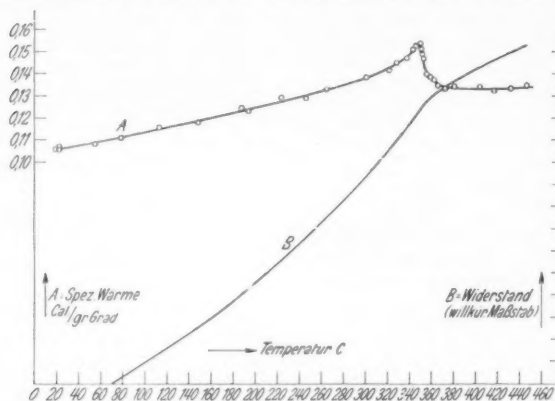


Fig. 4. „Reinnickel“.

Wahre spezifische Wärme und elektrischer Widerstand

daß der Wert bei 20° einem der Literatur entnommenen Mittelwert von 0,106 cal/g Grad gleichgesetzt wurde. Das Maximum der spezifischen Wärme liegt bei  $349,5 \pm 1/2^\circ$ . Der Wendepunkt der Widerstandskurve fällt innerhalb der Genauigkeit von  $\pm 1,5^\circ$  mit dem Maximum der spezifischen Wärme zusammen. Die Anomalie der spezifischen Wärme verschwindet

Tabelle 1

Reinnickel

$T^\circ\text{C}$	$c_{\text{Ni}}$	$T^\circ\text{C}$	$c_{\text{Ni}}$	$T^\circ\text{C}$	$c_{\text{Ni}}$	$T^\circ\text{C}$	$c_{\text{Ni}}$
20	0,1060	300	0,1377	348	0,1529	360	0,1373
60	0,1091	310	0,1400	349,5	0,1535	366	0,1350
100	0,1132	320	0,1420	350	0,1510	370	0,1342
140	0,1176	330	0,1448	350,5	0,1490	380	0,1336
180	0,1222	336	0,1469	352	0,1450	400	0,1330
220	0,1270	340	0,1485	354	0,1420	420	0,1330
260	0,1320	343	0,1500	356	0,1400	450	0,1335
280	0,1346	346	0,1515	358	0,1385	—	—

nicht sofort am CP., sondern erstreckt sich oberhalb des CP. über einen Bereich von etwa 30°. Auch der Temperaturkoeffizient des Widerstandes wird erst soweit oberhalb des Wendepunktes konstant.

Oberhalb 380 bis hinauf zu 450° ist die spezifische Wärme und der Temperaturkoeffizient des Widerstandes annähernd temperaturkonstant. Tab. 1 gibt die ausgeglichenen Werte der Fig. 4.

### Carbonylnickel

In Fig. 5 Kurve A sind die Resultate für Carbonylnickel aufgetragen, wobei wieder der Wert der spezifischen Wärme

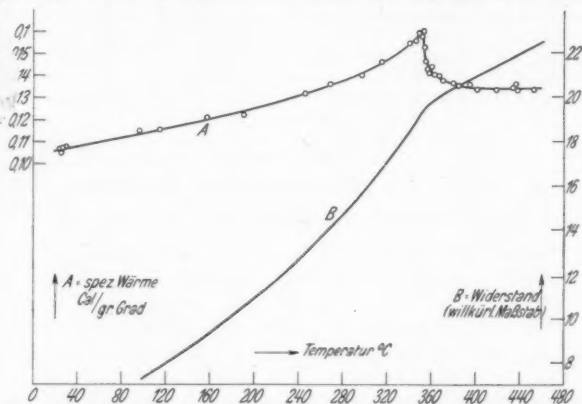


Fig. 5. Wahre spezifische Wärme und elektrischer Widerstand des Carbonylnickels

bei 20° gleich 0,106 cal/g Grad gesetzt wurde. Im Temperaturbereich von 20—240° und von 405—450° fällt dann die Kurve der spezifischen Wärme mit der für Reinnickel gemessenen praktisch zusammen. In der Umgebung des CP. liegt die Kurve des Carbonylnickels über der des Reinnickels. Das Maximum liegt bei 353°C und liegt wie beim Reinnickel bei derselben Temperatur wie der Wendepunkt der Widerstandskurve (Kurve B).

Während der Abfall der spezifischen Wärme unmittelbar oberhalb des CP. steiler ist als beim Reinnickel, erstreckt sich die Anomalie<sup>1)</sup> über einen größeren Bereich bis hinauf

1) Wir haben hier als Grenze der Anomalie die Temperatur bezeichnet, bei der die Kurve der spezifischen Wärme in den konstanten Verlauf einmündet. Der Ausdruck ist insofern unrichtig, als Konstanz

zu 405°. Von 405—460° ist wieder die spezifische Wärme annähernd konstant. Tab. 2 gibt die ausgeglichenen Werte der Fig. 5 wieder.

Tabelle 2  
Carbonylnickel

$T^{\circ}\text{C}$	$c_{\text{Ni}}$	$T^{\circ}\text{C}$	$c_{\text{Ni}}$	$T^{\circ}\text{C}$	$c_{\text{Ni}}$
20	0,1060	320	0,1466	360	0,1420
60	0,1095	330	0,1499	363	0,1400
100	0,1135	340	0,1536	370	0,1378
140	0,1177	346	0,1560	380	0,1358
180	0,1223	348	0,1570	390	0,1347
220	0,1276	350	0,1579	400	0,1340
260	0,1332	353	0,1593	420	0,1337
280	0,1370	354	0,1500	440	0,1337
300	0,1411	356	0,1455	450	0,1338
310	0,1437	358	0,1435	—	—

#### Diskussion

Fig. 6 gibt eine Zusammenstellung der neueren Messungen der wahren spezifischen Wärme des Nickels<sup>1)</sup>. Bei 20° wird

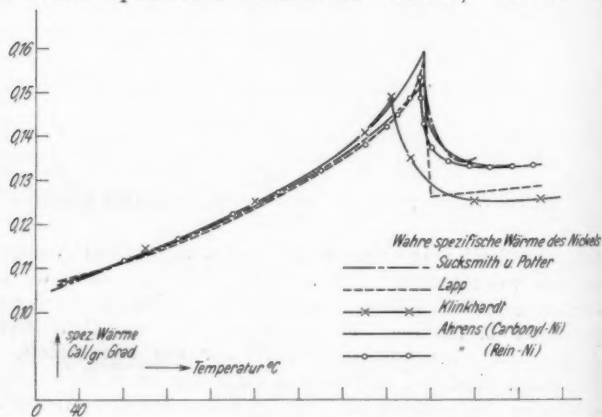


Fig. 6

der spezifischen Wärme nicht als normal bezeichnet werden kann, vgl. z. B. Platin. Die wirkliche Anomalie erstreckt sich also zu wesentlich höheren Temperaturen. Da jedoch das Einmünden in den fast konstanten Wert bei einer verhältnismäßig gut definierten Temperatur stattfindet, möge die Ausdrucksweise zur Charakterisierung der Kurven auch in folgenden beibehalten werden.

1) Vgl. die in der Einleitung genannten Arbeiten.

für die von uns benutzten Proben die spezifische Wärme zu 0,106 cal/g Grad gesetzt; bis zu etwa 290° unterscheiden sich die verschiedenen Messungen nicht außerhalb der Meßgenauigkeit. Dann treten größere Abweichungen auf. Sowohl unterhalb wie auch oberhalb des Maximums ist die spezifische Wärme offenbar empfindlich auf geringe Materialverschiedenheiten. Mit Ausnahme der Kurve von Lapp zeigen alle Messungen einen allmählichen abgerundeten Abfall vom Maximalwert auf den Minimalwert oberhalb des CP. Tab. 3 gibt eine Zusammenstellung der charakteristischen Daten der Kurven der Fig. 6.

Tabelle 3

Beobachter	CP. in °	$c_{\max}$	$c_{\min}$	$c_{\max} - c_{\min}$	Ber. d. Anom. in °
Sucksmith u. Potter .	353	0,152	0,134	0,018	25
Lapp . . . . .	353,5	0,158	0,126	0,032	7
Klinkhardt . . . . .	324	0,149	0,125	0,024	55
Ahrens, Reinnickel .	349,5	0,1535	0,133	0,0205	30
Carbon.-Ni .	353	0,1593	0,1337	0,0256	50

Die dritte Spalte gibt den Wert der spezifischen Wärme im Maximum, die vierte den kleinsten Wert oberhalb des CP., die fünfte die Differenz zwischen den Werten der vierten und fünften Spalte, den „Sprung“ der spezifischen Wärme; in der sechsten Spalte ist der früher definierte Bereich der Anomalie angegeben. Worauf die großen Unterschiede der verschiedenen Messungen oberhalb des CP. beruhen, bleibt ungeklärt. Die von Weiß und Lapp ausgesprochene Vermutung, daß die Differenz zwischen der annähernd konstanten beobachteten spezifischen Wärme oberhalb des CP. und dem nach der Debyeschen Theorie für das unmagnetische Nickel zu erwartenden Wert einem Freiheitsgrad entspricht, ist mit den Messungen der anderen Beobachter nicht im Einklang.

#### Spezifische Wärme und elektrischer Widerstand

Nach Gerlach<sup>1)</sup> ist der ferromagnetische Anteil des elektrischen Widerstandes dem Quadrat der spontanen Magnetisierung  $\sigma_0$  proportional, hat also auch dieselbe Temperaturabhängigkeit wie diese. Demgemäß sollte der ferromagnetische Anteil des wahren Temperaturkoeffizienten des Widerstandes dem Ausdruck  $d\sigma^2/dT$  proportional sein. Auch für den ferromagnetischen Anteil der spezifischen Wärme verlangt die

1) Phys. Ztschr. 33. S. 953. 1932.



Weiss'sche Theorie Proportionalität mit  $d\sigma^2/dT$ , so daß der magnetische Anteil der spezifischen Wärme und der des Widerstandstemperaturkoeffizienten unter sich proportional sein sollten. Tatsächlich zeigt der Widerstandstemperaturkoeffizient denselben typischen Temperaturverlauf wie die spezifische Wärme, und hat wie diese ein scharfes Maximum, das nach unseren Messungen stets innerhalb einer Genauigkeit von  $\pm 1,5^\circ$  (die durch die Widerstandsmessung bedingt ist) bei derselben Temperatur liegt, wie das Maximum der spezifischen Wärme. Ob der Bereich der Anomalie oberhalb des CP. für Widerstandskoeffizienten und spezifische Wärme zusammenfallen, war wegen der nicht ausreichenden Genauigkeit der

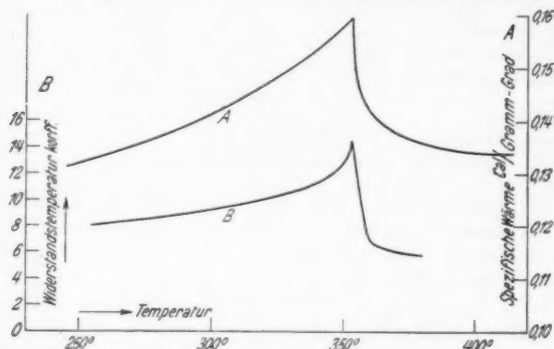


Fig. 7. Carbonylnickel.  
B Widerstandstemperaturkoeffizient und A spezifische Wärme

Widerstandsbestimmung nach unseren Messungen nicht zu entscheiden. Herr cand. phys. Wagner hat an einer anderen Probe des von uns benutzten Carbonylnickels aus Strom- und Spannungsmessungen mit Hilfe eines Wolffschen Kompensationsapparates in der Umgebung des CP. eine sehr genaue Widerstandsmessung ausgeführt, die erlaubte, den wahren Temperaturkoeffizienten zu ermitteln. Das Ergebnis zeigt Fig. 7. Zum Vergleich mit der spezifischen Wärme ist bemerkenswert der starke Anstieg unmittelbar vor dem Maximum und der steile Abfall oberhalb des Maximums, der sich im wesentlichen über einen Bereich von nur  $7^\circ$  erstreckt. Trotz der Ähnlichkeit zwischen den Kurven der spezifischen Wärme und des Widerstandskoeffizienten konnte eine einfache quantitative Beziehung zwischen beiden Größen nicht aufgestellt werden.

### Spezifische Wärme im äußeren Magnetfeld

Nach der Theorie der ferromagnetischen Anomalie der spezifischen Wärme von Weiss, die die wesentlichen Züge dieser Erscheinung richtig wiedergibt, sollte man erwarten, daß in sehr starken äußeren Magnetfeldern, in denen man „wahre“ Magnetisierung erreicht, d. h. Steigerung der Magnetisierung über den Betrag der der betreffenden Temperatur entsprechenden spontanen Magnetisierung hinaus, ein entsprechendes Anwachsen der magnetischen Energie und damit eine Beeinflussung der spezifischen Wärme eintritt, ebenso wie Gerlach eine Änderung des Widerstandes fand. Wir haben einen provisorischen Versuch gemacht, diesen Effekt nachzuweisen. Ein großer Elektromagnet stand zur Zeit der Versuche nicht zur Verfügung, so daß nur das Feld einer Magnetisierungsspule, die bei Dauerbelastung etwa 550 Gauss lieferte, benutzt werden konnte. Es war von vornherein zu erwarten, daß in so schwachen Feldern ein Effekt noch nicht nachgewiesen werden konnte. Das evakuierte Glasrohr  $R_1$  (Fig. 1 u. 2), das den Ofen mit der Nickelprobe (Carbonylnickel) enthielt, wurde axial in die 60 cm lange Magnetisierungsspule eingebaut. Bei Zimmertemperatur und bei einer Reihe von Versuchstemperaturen unmittelbar unterhalb und oberhalb des CP. wurde die spezifische Wärme jeweils ohne und mit Magnetfeld gemessen. Beide Werte stimmten stets innerhalb der Meßgenauigkeit überein, so daß in einem Feld von 550 Gauss eine eventuell eintretende Änderung der spezifischen Wärme kleiner als 1% sein muß.

### Zusammenfassung

Es wird eine neue Differentialmethode beschrieben zur Messung wahrer spezifischer Wärmen bei höheren Temperaturen, die mit elektrischer Energiezufuhr und sehr geringen Temperaturerhöhungen arbeitet. Mit dieser Methode wird die wahre spezifische Wärme von Platin und zwei Nickelproben im Temperaturbereich von 20–460° gemessen. Die Ergebnisse werden mit den vorhandenen Messungen anderer Beobachter verglichen. Der Zusammenhang von spezifischer Wärme und elektrischem Widerstand wird diskutiert.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Gerlach, auf dessen Veranlassung die vorstehende Arbeit in den Jahren 1931–1933 ausgeführt wurde, bin ich für Anregung und Förderung zu herzlichem Dank verpflichtet. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. W. Schütz für wertvolle Diskussionen.

München, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 21. August 1934)

# **Beitrag zur allgemeinen Theorie der Vierpole und Kettenleiter**

**Von Konstantin Dahr**

(Mit 11 Figuren)

## **1. Formale Umbildung der Vierpolgleichungen**

Unter einem Vierpol versteht man in der Elektrotechnik ein beliebiges Leitungssystem (oder ein noch allgemeineres elektromagnetisches System), das durch zwei Paare von Kuppelungsklemmen mit anderen Systemen zusammengeschaltet werden kann. Das eine Paar von Polklemmen nennt man die Primärseite, das andere die Sekundärseite.

Die im folgenden betrachteten Vierpole werden alle als passiv (d. h. ohne innere Energiequellen) und mit von der Strombelastung unabhängigen Eigenschaften vorausgesetzt. Der

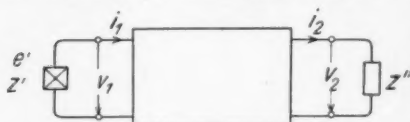


Fig. 1

Stromverlauf darf hinsichtlich der Zeit im allgemeinen willkürlicher Art sein. In den Formeln vorkommende Impedanzen und dergleichen sind demnach als Operatorenausdrücke zu

behandeln, die auf bekannte Weise durch Einführung von  $p$  anstatt  $d/dt$  in die Grundgleichungen erhalten werden. Ströme und Spannungen werden auf die aus der Fig. 1 ersichtliche Weise positiv gerechnet.

Die Kurzschluß- und Isolationsimpedanzen von der Primärseite heraus gemessen, wollen wir mit  $K'$  bzw.  $I'$  bezeichnen, und mit  $K''$  bzw.  $I''$  die entsprechenden von der Sekundärseite gemessenen Größen.

Der Zusammenhang zwischen sekundären und primären Strömen und Spannungen kann durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden:

$$(1a) \quad \begin{cases} v_1 = C' \cdot (v_2 + K'' \cdot i_2), \\ i_1 = C'' \cdot (i_2 + \frac{1}{I'} \cdot v_2), \end{cases}$$

die, bezüglich  $v_2$  und  $i_2$  aufgelöst, das gleichwertige System:

$$(1b) \quad \begin{cases} v_2 = C'' \cdot (v_1 - K' \cdot i_1), \\ i_2 = C' \cdot \left(i_1 - \frac{1}{I'} \cdot v_1\right) \end{cases}$$

geben.

Zwischen den hier vorkommenden Koeffizienten  $K, I$  und  $C$  gelten die Beziehungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{K'}{K''} = \frac{I'}{I''} = \frac{C'}{C''}, \\ \frac{1}{C' C''} = 1 - \frac{K'}{I'} = 1 - \frac{K''}{I''}. \end{cases}$$

Je drei unter diesen sechs Konstanten bestimmen offenbar vollständig die Netzeigenschaften des Vierpols.

Wir nehmen an, das zur Primärseite eine Stromquelle mit der elektromotorischen Kraft  $e'(t)$  und der inneren Impedanz  $Z'$  und zur Sekundärseite eine Belastungsimpedanz  $Z''$  angeschlossen sind. Das Gleichungssystem (1a) und (1b) zusammen mit:

$$(3) \quad \begin{cases} v_1 = e' - Z' \cdot i_1, \\ v_2 = Z'' \cdot i_2 \end{cases}$$

gibt dann die Lösung des Grundproblems: die Ströme  $i_1$  und  $i_2$  und die Spannungen  $v_1$  und  $v_2$  zu berechnen.

Wir wollen jetzt diese Lösung auf eine spezielle Weise herleiten; sie wird dabei eine etwas besondere Form erhalten, deren Bedeutung erst bei der Verwendung auf Kettenleiter klar hervortreten kann.

Wir definieren zwei neue Impedanzoperatoren,  $Z_1$  und  $Z_2$ :

$$(4) \quad v_1 = Z_1 \cdot i_1; \quad v_2 = Z_2 \cdot i_2;$$

im folgenden als die Primär- bzw. die Sekundärimpedanz bezeichnet. Diese sind gemäß (1a) oder (1b) durch die lineare Transformation:

$$(5a) \quad Z_1 = I' \cdot \frac{Z_2 + K''}{Z_2 + I''}$$

oder

$$(5b) \quad Z_2 = -I'' \cdot \frac{Z_1 - K'}{Z_1 - I'}$$

verbunden.

Eine solche Transformation kann immer auf die sogenannte kanonische Form:

$$(5c) \quad \frac{Z_1 - P}{Z_1 - Q} = \lambda \cdot \frac{Z_2 - P}{Z_2 - Q}$$

gebracht werden.  $P$  und  $Q$  nennen wir die Fixpunktsimpedanzen,  $\lambda$  das Transformationsverhältnis. Die vorigen sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(6a) \quad Z^2 - (I' - I'') \cdot Z - I' K'' = 0.$$

Nach Berechnung von  $P$  und  $Q$  findet man  $\lambda$  aus der Gleichung:

$$(6b) \quad \lambda = \frac{I' - P}{I' - Q}.$$

Wir nennen  $P, Q$  und  $\lambda$  die *kanonischen Daten* des Vierpols und wollen nun eine Lösung des Grundproblems darzustellen suchen, die diese drei Größen anstatt der Konstanten  $K, I$  und  $C$  enthält. Nach (3) wird:

$$(7) \quad \begin{cases} i_1 = \frac{e'}{Z' + Z_1}, \\ Z_2 = Z''. \end{cases}$$

Aus (5c) und (7) erhält man:

$$(8) \quad Z_1 = \frac{Z''(P - \lambda Q) - (1 - \lambda) \cdot P Q}{Z'' - Q - \lambda(Z'' - P)}.$$

Wird dieser Ausdruck in die erste Gl. (7) eingesetzt, so nimmt der Primärstrom die folgende Form an:

$$(9) \quad i_1 = \frac{1 + \lambda \cdot G''}{1 - \lambda \cdot G' \cdot G''} \cdot \frac{e'}{Z' + P}.$$

Dabei haben wir die Bezeichnungen benutzt:

$$(10) \quad G' = -\frac{Z + Q}{Z + P}, \quad G'' = -\frac{Z'' - P}{Z'' - Q}.$$

Etwas umständlicher wird die Ableitung der Relation zwischen  $i_1$  und  $i_2$ . Nach (1a), (1b) und (4) findet man:

$$(11a) \quad i_1 = C'' \cdot \left(1 + \frac{Z_2}{I''}\right) \cdot i_2,$$

$$(11b) \quad i_2 = C' \cdot \left(1 - \frac{Z_1}{I'}\right) \cdot i_1.$$

Wir gehen z. B. von der letzteren dieser Gleichungen aus und führen dort  $P, Q$  und  $\lambda$  anstatt  $C'$  und  $I'$  ein. Aus (6a) folgt:

$$(12) \quad P + Q = I' - I'', \quad P \cdot Q = -I' K'' = -I'' K'$$

und aus (2) und (6b):

$$(13) \quad I' = \frac{P - \lambda Q}{1 - \lambda}, \quad I'' = -\frac{Q - \lambda P}{1 - \lambda},$$

$$(14) \quad C'^2 = \frac{I'^2}{I' \cdot I'' + P \cdot Q}.$$

Demgemäß wird:

$$(15) \quad C' = \frac{1}{\pm \sqrt{\lambda}} \cdot \frac{P - \lambda Q}{P - Q}.$$

Werden nun die durch (13) und (15) gegebenen Ausdrücke für  $I'$  bzw.  $C'$  und der Ausdruck für  $Z_1$  gemäß (8) in (11b) eingeführt, ergibt sich nach einfachen Rechnungen der gesuchte Zusammenhang in der Form:

$$(16) \quad i_2 = \pm \sqrt{\lambda} \cdot \frac{1 + G''}{1 + \lambda \cdot G''} \cdot i_1.$$

Die Formeln (9), (10) und (16) stellen zusammen mit (3) die vollständige Lösung des Grundproblems dar. Wir bemerken, daß die Ausdrücke für  $i_1$  und  $i_2$  invariant bleiben, wenn man  $P$  und  $Q$  durch einander und  $\lambda$  durch  $1/\lambda$  ersetzt. Das Zeichen der Quadratwurzel ist unwesentlich, da eine jede Polklemme der Sekundärseite zum Pluspol gewählt werden kann.

Die Ausdrücke für  $i_1$  und  $i_2$  haben jetzt dieselbe Form, wie man sie für die Ströme am Anfang und Ende einer homogenen elektrischen Leitung durch Superposition von unendlich vielen hin- und rücklaufenden Wellen bekommen kann. Mit diesem Wellensystem (das in unserem Falle offenbar kein physikalisches Gegenstück hat) als Vorbild, kann man übrigens die oben gewonnenen Ausdrücke auch herleiten, indem man eine unbegrenzte Folge von virtuellen Zuständen, die durch iterative Anwendung des sogenannten Théveninschen Theorems erhalten sind, aufeinander überlagert<sup>1)</sup>. Wegen der formalen Analogie zwischen der Vierpoltheorie und der Leitungstheorie ist es vorteilhaft, einige Begriffe aus der letzteren zu der ersteren zu übertragen. Wir nennen also die durch (6) definierten Größen  $G'$  und  $G''$  den primären bzw. sekundären Reflexionskoeffizienten und die Größe:

$$(17) \quad \Gamma = \pm \sqrt{\lambda}$$

die Transmissions- oder Fortpflanzungskonstante (oder auch den Transmissionsoperator).

Bei einfach harmonischen Zuständen [diese werden nach der sogenannten symbolischen Methode ( $p = j\omega$ ) behandelt], ist  $\lambda$  eine komplexe Zahl. Infolge des schon erwähnten Umstandes, daß  $P$  und  $Q$  ihre Rollen tauschen, wenn  $\lambda$  durch  $1/\lambda$  ersetzt wird, kann man es offenbar immer so einrichten, daß  $|\lambda| \leq 1$  ist. Bisweilen ist es vorteilhaft, bei solchen Zuständen:

$$(18) \quad \Gamma = e^{-\delta}, \quad \delta = \beta + j\alpha$$

1) Vgl. unten im Anhang.

zu setzen. Wir nennen dann:  $\delta$  den Transmissionsexponenten,  $\beta$  den Dämpfungsexponenten und  $\alpha$  den Winklexponenten. Offenbar wird:

$$(18a) \quad \beta = -\frac{1}{2} \log |\lambda|.$$

Wir nennen die Sekundärseite iterativ angeschlossen, wenn die Belastungsimpedanz  $Z''$  mit der Fixpunktimpedanz  $P$  in Formel (5c) übereinstimmt. Die Gl. (9) und (16) werden dann erheblich vereinfacht:

$$(19a, b) \quad i_1 = \frac{e'}{Z' + P}; \quad i_2 = \pm \sqrt{\lambda} \cdot i_1 = \Gamma \cdot i_1.$$

Demnach gilt der folgende wichtige Satz:

Bei iterativem Anschluß der Sekundärseite durch  $P$  wird der Primärstrom derselbe, als wenn die Stromquelle direkt durch  $P$  geschlossen wird, und der Sekundärstrom gleich Primärstrom mal Transmissionskonstante.

Wir bezeichnen mit  $i_2^*$  den Strom, der in der Impedanz  $Z''$  entstehen würde, falls diese direkt zur Stromquelle geschaltet würde. Man verifiziert leicht, daß  $i_2^*$  aus (9) und (16) mit  $\lambda = 1$  erhalten wird:

$$i_2^* = \pm \frac{1 + G''}{1 - G' G''} \cdot \frac{e'}{Z' + P}.$$

Also wird:

$$(20) \quad i_2 = \sqrt{\lambda} \cdot \frac{1 - G' G''}{1 - \lambda \cdot G' G''} \cdot i_2^*.$$

Bei einfach harmonischem Zustand pflegt man das Verhältnis  $I_2 : I_2^*$  ( $I_2$  und  $I_2^*$  sind komplexe Vektoren) den Einschaltungsverlust zu nennen<sup>1)</sup>. Offenbar wird dieser gleich  $\sqrt{\lambda}$ , wenn  $G'$  oder  $G''$  gleich Null, d. h. wenn eine der Seiten iterativ angeschlossen ist. (Iterativer Anschluß der Primärseite bedeutet, daß  $Z' = -Q$  ist. Bei sinusförmigem Verlauf und kleinen Verlusten lassen sich die iterativen Anschlüsse einfach realisieren, weil sowohl positive als negative Reaktanzen erhalten werden können; bei willkürlichen Zuständen werden sie in der Regel virtueller Natur.)

Bei der Untersuchung von speziellen Vierpolen muß man die kanonischen Daten  $P$ ,  $Q$  und  $\lambda$  aus den gegebenen Kreis-konstanten, z. B. den Kurzschluß- und Isolationsimpedanzen, berechnen. Dies ist leicht getan mit Hilfe von (6a) und (6b).

<sup>1)</sup> Vgl. H. Pleijel, *Telefonledningars elektriska egenskaper*, Stockholm 1923, S. 53.



Von besonderem Interesse sind die symmetrischen Vierpole. Hier ist:  $K' = K'' = K$ ;  $I' = I'' = I$ ; und wir bekommen die einfachen Ausdrücke:

$$(21) \quad P = \sqrt{KI}; \quad Q = -\sqrt{KI}; \quad \lambda = \frac{1 - \sqrt{\frac{K}{I}}}{1 + \sqrt{\frac{K}{I}}}.$$

Ein Vierpol wird rational genannt, wenn das elektromagnetische System von einer endlichen Anzahl von Elementen (d. h. Induktanzen, Kapazitäten und Widerständen) aufgebaut ist; dann werden  $K$ ,  $K'$ ,  $I$  und  $I''$  rationale Funktionen vom Operator  $p$ .

Eine sowohl theoretisch als praktisch wichtige Klasse bilden die verlustfreien Vierpole. Diese haben die Eigenschaft, daß für  $p = j\omega$  die Größen  $K$  und  $I$  rein imaginär sind.

## 2. Anwendung der Vierpolgleichungen auf Kettenleiter

Unter einem Kettenleiter versteht man eine Folge von endlich oder unendlich vielen hintereinander geschalteten Vierpolen. Wir nehmen an, daß die Fixpunktsimpedanzen  $P$  und  $Q$  überall dieselben sind, während das Transformationsverhältnis  $\lambda$  von Glied zu Glied wechseln mag. Das allgemeine Kettenleiterproblem kann so formuliert werden:

Ein Kettenleiter (mit  $n$  Gliedern) sei mit der Impedanz  $Z''$  am Ende belastet und am Anfang zu einer Stromquelle mit der Impedanz  $Z'$  und der elektromotorischen Kraft  $e'(t)$  geschaltet. Man suche Strom und Spannung an einer beliebigen Stelle des Leiters.

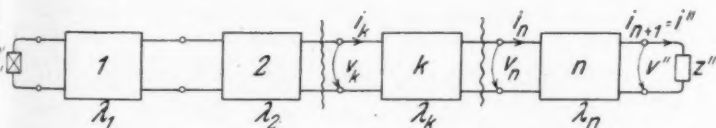


Fig. 2

Auf das  $k$ te Glied verwendet, lautet die Formel (5c) (vgl. Fig. 2):

$$(22) \quad \frac{Z_k - P}{Z_k - Q} = \lambda_k \cdot \frac{Z_{k+1} - P}{Z_{k+1} - Q},$$

wobei  $Z_k$  ( $k = 1, 2 \dots n$ ) durch die Beziehung:  $v_k = Z_k \cdot i_k$

definiert wird. Werden diese Gleichungen für  $k = 1, 2 \dots n$  miteinander multipliziert, so ergibt sich:

$$(23) \quad \frac{Z_1 - P}{Z_1 - Q} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n \cdot \frac{Z'' - P}{Z'' - Q}.$$

Man ersieht hieraus, daß der ganze Kettenleiter als ein Vierpol mit den Fixpunktsimpedanzen  $P$  und  $Q$  und dem Transformationsverhältnis  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n$  behandelt werden kann. Wir schreiben kurz:

$$(24) \quad \lambda^{(k)} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_k.$$

Wenn  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ , wird also  $\lambda^{(k)} = \lambda^k$ .

Gemäß (9) und (16) erhalten wir für den Primärstrom  $i' = i_1$  und den Sekundärstrom  $i'' = i_{n+1}$  die Ausdrücke:

$$(25a, b) \quad \begin{cases} i' = \frac{1 + \lambda^{(n)} \cdot G''}{1 - \lambda^{(n)} G' G''} \cdot \frac{e'}{Z' + P}, \\ i'' = \pm \sqrt{\lambda^{(n)}} \cdot \frac{1 + G''}{1 + \lambda^{(n)} \cdot G''} \cdot i'. \end{cases}$$

Es ist nun einfach, den in das  $(k+1)$ te Glied eingehenden Strom zu berechnen. Betrachtet man die  $k$  ersten Glieder als einen neuen Vierpol, erhält man aus der letzteren der obigen Formeln:

$$(26) \quad i_{k+1} = \pm \sqrt{\lambda^{(k)}} \cdot \frac{1 + G_{k+1}}{1 + \lambda^{(k)} G_{k+1}} \cdot i'.$$

Hier bezeichnet  $G_{k+1}$  den Reflexionskoeffizienten der zum  $k$ ten Gliede gelenkten Belastung, die aus den Gliedern Nrs.  $(k+1)$ ,  $(k+2) \dots n$  und der Impedanz  $Z''$  besteht. Nach der Definitionsformel (10) ist:

$$(27) \quad G_{k+1} = - \frac{Z_{k+1} - P}{Z_{k+1} - Q}.$$

Gemäß (22) kann aber dieser Reflexionskoeffizient auf  $G''$  zurückgeführt werden, indem:

$$G_n = \lambda_n \cdot G''; \quad G_{n-1} = \lambda_{n-1} \cdot G_n = \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n \cdot G''$$

usw. Folglich wird:

$$(28) \quad G_{k+1} = \lambda_{k+1} \cdot \lambda_{k+2} \dots \lambda_n \cdot G'' = \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(k)}} \cdot G'',$$

und damit die Gl. (26):

$$(29a) \quad i_{k+1} = \pm \sqrt{\lambda^{(k)}} \cdot \frac{1 + \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(k)}} \cdot G''}{1 + \lambda^{(n)} \cdot G''} \cdot i'.$$

Nach (25a) können wir auch schreiben:

$$(29b) \quad i_{k+1} = \pm \sqrt{\lambda^{(k)}} \cdot \frac{1 + \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(k)}} \cdot G''}{1 - \lambda^{(n)} \cdot G' G''} \cdot \frac{e'}{Z' + P}.$$

Um die Spannung  $v_{k+1} = Z_{k+1} \cdot i_{k+1}$  zu finden, brauchen wir nur  $Z_{k+1}$  mit Hilfe von (28) zu berechnen; es ergibt sich:

$$(30) \quad Z_{k+1} = \frac{P + \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(k)}} \cdot Q \cdot G''}{1 + \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(k)}} \cdot G''}$$

und daraus:

$$(31) \quad v_{k+1} = \pm \sqrt{\lambda^{(k)}} \cdot \frac{P + \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(k)}} \cdot G'' \cdot Q}{1 - \lambda^{(n)} \cdot G' G''} \cdot \frac{e'}{Z' + P}.$$

Damit haben wir das vorgelegte Problem formal vollständig gelöst. Die Formeln vereinfachen sich erheblich, wenn der Kettenleiter sekundär iterativ angeschlossen ist, d. h.  $G'' = 0$ ; dann bekommt man:

$$(32a, b, c) \quad \begin{cases} i' = \frac{e'}{Z' + P}, \\ i_{k+1} = \pm \sqrt{\lambda^{(k)}} \cdot i', \\ v_{k+1} = P \cdot i_{k+1}. \end{cases}$$

Da  $\lambda$  als eine komplexe Zahl vom Betrag  $|\lambda| < 1$  betrachtet werden kann, erhält man die letzten Formeln aus den entsprechenden vorhergehenden mit  $n = \infty$ , was dem Falle unendlich vieler Glieder entspricht. Einen bei allen möglichen Frequenzen und beliebigen Stromzuständen iterativen Anschluß kann man in der Regel nur theoretisch durch Einführung eines unendlichen Leiters erzielen. Bei einfach harmonischem Zustand und einer bestimmten Frequenz, oder wenigstens einem speziellen Frequenzgebiete, kann jedoch ein iterativer Anschluß eines endlichen Kettenleiters mit verhältnismäßig einfachen Vorrichtungen erhalten werden. Wenn  $|\lambda|$  eine kleine Zahl ist, kann man oft mit wenigen Gliedern die unendlich lange Leitung hinreichend gut approximieren.

### 3. Die Siebeigenschaften der rationalen Kettenleiter bei stationär sinusförmigen Zuständen

Wir wollen die allgemeinen Transmissionseigenschaften eines rationalen, homogenen (d. h. aus gleichartigen Gliedern aufgebauten) Kettenleiters untersuchen; diesen nehmen wir un-

endlich lang an, damit die Formeln (32) gelten. Der Strom- und Spannungsverlauf den Leiter entlang wird dann vom Transformationsverhältnis  $\lambda$  bestimmt. Der allgemeine Ausdruck für  $\lambda$  mit Hilfe der Kurzschluß- und Isolationsimpedanzen wird [vgl. (21)]:

$$(21a) \quad \lambda = \frac{(I' + I'') - \sqrt{(I' - I'')^2 + 4I'K''}}{(I' + I'') + \sqrt{(I' - I'')^2 + 4I'K''}}.$$

Um die Diskussion der Funktion  $\lambda(\omega)$  ( $\omega$  = die Winkelgeschwindigkeit) zu vereinfachen, machen wir die Voraussetzung, der Kettenleiter sei ohne Verluste; vom physikalischen Standpunkt aus bedeutet dies, daß die Glieder aus reinen Induktanzen und Kapazitäten zusammengesetzt sind. In der Praxis strebt man in der Regel danach, die Verluste, soweit es aus ökonomischen Gründen möglich ist, herabzusetzen. Teils deswegen, teils weil die charakteristischen Siebeigenschaften eines rationalen Kettenleiters am klarsten zum Ausdruck kommen, falls dieser verlustfrei ist, ist unsere Voraussetzung berechtigt.

Bei einem verlustfreien Vierpol sind  $I$  und  $K$  rein imaginäre rationale Funktionen von  $\omega$ ; deshalb wird der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in (21a) eine reelle Funktion, und man kann offenbar  $\lambda$  in der Form:

$$(33) \quad \lambda = \frac{j \cdot U - \sqrt{W}}{j \cdot U + \sqrt{W}}$$

schreiben, wo  $U$  und  $W$  reelle Polynome in  $\omega^2$  sind. Wir können übrigens:

$$(34) \quad W = W_0 \cdot (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2) \dots (\omega^2 - \omega_n^2)$$

setzen und die Konstante  $W_0$  positiv annehmen, um die Verhältnisse für die Diskussion zu präzisieren. Die nachfolgende Fig. 3 veranschaulicht den prinzipiellen Verlauf der Funktion  $W(\omega)$ , wenn  $n$  gerade ist.

Man erhält wechselweise Intervalle, wo  $W(\omega) > 0$ , und solche, wo  $W(\omega) < 0$  ist. Innerhalb eines Intervalles der ersten Gattung ist  $\sqrt{W(\omega)}$  reell und  $|\lambda| \equiv 1$ ; folglich  $\beta \equiv 0$  [vgl. (18a)]. Innerhalb eines Intervalles der zweiten Gattung ist  $\lambda$  eine reelle Zahl, nach Übereinkunft  $< 1$ ; also  $\beta > 0$ . Wie sich  $\beta$  übrigens verhält, ist für die qualitative Untersuchung belanglos; je länger die Kette ist, um so schneller muß der resultierende Exponent  $\beta$  beiderseits eines Intervalles erster Gattung anwachsen. Die Fig. 4 veranschaulicht den Verlauf von  $\beta(\omega)$ .

Der verlustfreie, rationale Kettenleiter besitzt also die Eigenschaft, ohne Dämpfung Ströme und Spannungen gewisser Frequenzen (nämlich in der Figur:

$$0 < \omega < \omega_1; \quad \omega_2 < \omega < \omega_3; \quad \dots \quad \omega_n < \omega$$

durchzulassen, während solche anderer Frequenzen ausgesiebt werden, indem sie die Leitung entlang exponentiell abnehmen.

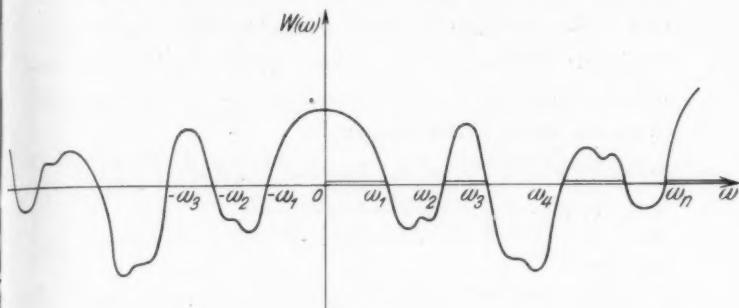


Fig. 3

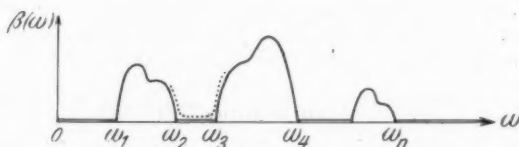


Fig. 4

Bei einem physischen Kettenleiter kommt offenbar auch eine gewisse Verlustdämpfung vor. Wenn die Verluste klein sind, muß die wahre Kurve für  $\beta(\omega)$ , wie es in der Figur angedeutet ist, im allgemeinen nur wenig von der theoretischen Kurve der reinen Frequenzdämpfung abweichen.

#### 4. Die Behandlung der Einschwingungsvorgänge von methodischem Gesichtspunkte aus

Das Grundproblem, den Stromverlauf bei Einschaltung einer beliebigen elektromotorischen Kraft auf einen Kettenleiter zu ermitteln, ist durch das Vorhergehende nur ganz formal gelöst worden. Um den expliziten Zeitausdruck des Einschwingungsvorganges zu finden muß man dann nach gewissen Regeln die gewonnenen Operatorenausdrücke deuten. Wir wollen

nun eine dabei anzuwendende allgemeine Methodik kurz besprechen und gehen darum von den Gl. (32) eines unendlich langen Kettenleiters aus. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß der Leiter homogen und die Impedanz  $Z'$  der Stromquelle gleich Null ist. Die in das  $(k+1)$ te Glied eingehende Spannung  $v_{k+1}(t)$  und der entsprechende Strom  $i_{k+1}(t)$  werden durch die Beziehungen:

$$(35) \quad v_{k+1}(t) = [\Gamma(p)]^k \cdot e(t), \quad i_{k+1}(t) = A(p) \cdot v_{k+1}(t)$$

bestimmt; hier bezeichnet  $\Gamma(p) = \pm \sqrt{\lambda(p)}$  den Transmissionsoperator,  $p$  das Symbol  $d/dt$  und  $A(p) = \frac{1}{P(p)}$  den reziproke Wert des einen Fixpunktoperators.

Die Berechnung von  $v_{k+1}(t)$  und  $i_{k+1}(t)$  kann übrigen direkt auf die Sprungfunktion  $H(t)$  zurückgeführt werden, wenn man  $e(t)$  gemäß der Operatorengleichung

$$(36) \quad e(t) = E(p) \cdot H(t)$$

definiert.

Die eine Seite des Problems besteht nun in der Bestimmung der sogenannten Primärfunktionen der Operatoren  $\Gamma(p)$ ,  $A(p)$  und  $E(p)$ , d. h. derjenigen Zeitfunktionen  $\gamma(t)$ ,  $a(t)$  und  $e(t)$  bzw. die die genannten Ausdrücke als *Basintegratoren* haben. Wenn eine Funktion  $f(t)$  durch Einwirkung des Operators  $F(p)$  auf die Sprungfunktion  $H(t)$  hervorgeht, der Schreibweise

$$(37) \quad f(t) = F(p) \cdot H(t)$$

gemäß, bedeutet dies definitionsgemäß, daß  $f(t)$  durch d komplexe Integral

$$(37a) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) \cdot \frac{e^{pt}}{p} \cdot dp$$

dargestellt wird.  $F(p)$  nennt man deshalb auch den zu  $f(t)$  gehörenden Basintegrator. Der Integrationsweg in (37a) soll eine zur imaginären Achse der komplexen  $p$ -Ebene parallele Gerade sein;  $\sigma$  ist eine reelle Zahl, die so groß sein soll, daß alle Singularitäten des Integranden links vom Integrationswege liegen.

Im vorliegenden Falle haben wir die drei Definitionsgleichungen:

$$(38a, b, c) \quad \begin{cases} \gamma(t) = \Gamma(p) \cdot H(t), \\ a(t) = A(p) \cdot H(t), \\ e(t) = E(p) \cdot H(t). \end{cases}$$

Nachdem die Funktionen links gemäß (37a) berechnet worden sind, bildet man die entsprechenden Integraloperatoren:

$$(39a, b, c) \quad \begin{cases} \Gamma = \left[ \gamma(0) + \int_0^t \gamma_1(t-\tau) d\tau \right], \\ A = \left[ a(0) + \int_0^t a_1(t-\tau) d\tau \right], \\ E = \left[ e(0) + \int_0^t e_1(t-\tau) d\tau \right]. \end{cases}$$

Mit Hilfe derselben kann man die expliziten Zeitausdrücke für Spannung und Strom so schreiben:

$$(40a, b) \quad \begin{cases} v_{k+1}(t) = [\Gamma]^k \times e(t) = [\Gamma]^k \times E \times H(t), \\ i_{k+1}(t) = A \times v_{k+1}(t). \end{cases}$$

Die symbolische Potenzierung von  $\Gamma$  wird nach den Formeln:

$$(41a) \quad [\Gamma]^k = \left[ \gamma(0)^k + \int_0^t K_k(t-\tau) d\tau \right],$$

$$(41b, c) \quad \begin{cases} K_k(x) = k \cdot \sum_{v=1}^{k-1} \gamma(0)^{k-v} \cdot \gamma_v(x) + \gamma_k(x), \\ \gamma_v(t-\tau) = \int_0^t \gamma_{v-1}(t-\xi) \cdot \gamma_1(\xi-\tau) d\xi, \\ \gamma_1(x) = \gamma'(x) \end{cases}$$

bewerkstelligt.

In den Gl. (40a, b) treten auch symbolische Produkte von verschiedenen Integraloperatoren auf; solche werden auf folgende Weise ausgeführt.

Es seien:

$$F_1 = \left[ f_1(0) + \int_0^t f_1'(t-\tau) d\tau \right]; \quad F_2 = \left[ f_2(0) + \int_0^t f_2'(t-\tau) d\tau \right]$$

zwei Integraloperatoren. Dann ist das symbolische Produkt von ihnen

$$(42a) \quad F_1 \times F_2 = \left[ f_1(0) \cdot f_2(0) + \int_0^t K_{12}(t-\tau) d\tau \right],$$



wobei

$$(42b, c) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{12}(x) = f_1(0) \cdot f_2'(x) + f_2(0) \cdot f_1'(x) + f_{12}'(x) = K_{21}(x) \\ \text{und} \\ f_{12}(t - \tau) = \int_{\tau}^t f_1'(t - \xi) \cdot f_2'(\xi - \tau) \cdot d\xi. \end{array} \right.$$

Die Formel (42a) gibt auch das Produkt mehrerer Integraloperatoren, denn das symbolische Produkt gehorcht den gewöhnlichen Multiplikationsgesetzen, und die Faktoren dürfen deshalb beliebig assoziiert und permutiert werden.

Damit haben wir dargetan, wie man nach Berechnung der Primärfunktionen  $[e(t)]$  ist in den meisten Fällen schon von Anfang an bekannt] die expliziten Ausdrücke für  $v_{k+1}(t)$  und  $i_{k+1}(t)$  gemäß (40a, b) bilden kann.

Die Funktionen  $\gamma(t)$  und  $a(t)$  sind übrigens von unmittelbarer praktischer Bedeutung; die erstere gibt ja die Spannungsvariation den unendlichen Kettenleiter entlang bei plötzlicher Einschaltung einer konstanten elektromotorischen Kraft; die letztere gibt den ausgehenden Strom derselben Leitung.

Die oben beschriebene Methode führt nicht immer am schnellsten zum erwünschten Ziele. Manchmal ist es am vorteilhaftesten, nach allgemeinen funktionentheoretischen Methoden das komplexe Integral (37a) direkt auszuwerten. Dies ist besonders der Fall, wenn der Operatorenausdruck solcher Gestalt ist, daß irgendeines der sogenannten Expansionstheoreme zur Verwendung kommen kann.

#### 5. Einige Anwendungen der allgemeinen Theorie bei einer speziellen Klasse von Kettenleitern

Um die oben angegebenen Methoden etwas zu illustrieren, wollen wir jetzt gewisse Untersuchungen in konkreten Fällen durchführen. Wir wählen zu diesem Zwecke eine Klasse von Kettenleitern mit einer charakteristischen und verhältnismäßig einfachen Form des Transmissionsoperators  $\Gamma(p)$ . Zu derselben gehören u. a. der sogenannte Dreikreisleiter und der Transformatorleiter, beide in der Technik sehr wichtige Leitungstypen. Wir beginnen damit, bei diesen Leitern die Ausdrücke für  $\Gamma(p)$  herzuleiten.

##### I. Der Dreikreisleiter<sup>1)</sup>

Bei der Berechnung von  $\Gamma(p)$  können wir uns das Vierpolelement in sogenannter  $T$ -Schaltung angeordnet denken;

1) Vgl. unten im Anhang.

auf eine solche läßt sich auch jede sogenannte  $\Pi$ -Schaltung leicht zurückführen. Den Vierpol setzen wir weiter als verlustfrei und unsymmetrisch voraus.

In der Formel (21a) für  $\Gamma(p)$  kommen die Kurzschluß- und Isolationsimpedanzen vor; für diese findet man leicht mit Hilfe des Prinzipschemas der Fig. 5 die folgenden Ausdrücke:

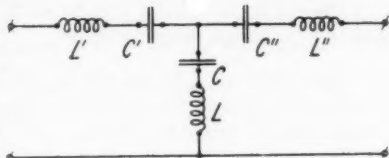


Fig. 5

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} I' &= p(L' + L) + \frac{1}{p} \left( \frac{1}{C'} + \frac{1}{C} \right), \\ I'' &= p(L'' + L) + \frac{1}{p} \left( \frac{1}{C''} + \frac{1}{C} \right), \\ K' &= pL' + \frac{1}{pC'} + \frac{\left( pL'' + \frac{1}{pC''} \right) \left( pL + \frac{1}{pC} \right)}{p(L'' + L) + \frac{1}{p} \left( \frac{1}{C''} + \frac{1}{C} \right)}, \\ K'' &= pL'' + \frac{1}{pC''} + \frac{\left( pL' + \frac{1}{pC'} \right) \left( pL + \frac{1}{pC} \right)}{p(L' + L) + \frac{1}{p} \left( \frac{1}{C'} + \frac{1}{C} \right)}. \end{aligned} \right.$$

Wir führen nun die Bezeichnungen ein:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\frac{1}{C'} + \frac{1}{C''}}{L' + L''}, \\ \omega'^2 &= \frac{\frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} + \frac{2}{C}}{L' + L'' + 2L}, \\ \omega_2^2 &= \frac{\frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} + \frac{4}{C}}{L' + L'' + 4L}, \\ \alpha &= \frac{\sqrt{(L' + L'')(L' + L'' + 4L)}}{L' + L'' + 2L}. \end{aligned} \right.$$

Mit Benutzung von diesen kann man den Ausdruck für  $\Gamma(p)$  auf die Form bringen:

$$(45) \quad [\Gamma(p)]^2 = \frac{1 - \alpha \cdot \frac{\sqrt{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}}{p^2 + \omega'^2}}{1 + \alpha \cdot \frac{\sqrt{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}}{p^2 + \omega'^2}}.$$

Aus (44) ist zu ersehen, daß immer  $\kappa < 1$ , und die Frequenz  $\omega'$  zwischen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gelegen ist. Wir bekommen:

$$(46) \quad \omega_2 \geq \omega_1 \text{ je nachdem } \frac{1}{LC} \geq \frac{\frac{1}{C'} + \frac{1}{C''}}{L' + L''}.$$

Es entsteht ganz natürlich die Frage, ob sich nicht der Ausdruck (45), der durch direkte Einsetzungen in die Grundformel (21a) erhalten wurde, so umformen läßt, daß der Operator  $\Gamma(p)$  selbst, nicht dessen Quadrate, herausfällt. In der Tat wird durch die Formeln (44) eine Beziehung zwischen  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  und  $\omega'$  dargestellt, die die Fortschaffung von  $\omega'$  aus  $\Gamma(p)$  ermöglicht. Durch eine Rechnung, deren allgemeine Gründe wir in einem folgenden Abschnitt näher darlegen werden, kann man auch leicht einen Ausdruck der gewünschten Form herleiten, nämlich:

$$(47) \quad \Gamma(p) = \pm \frac{1 - \xi \sqrt{\frac{p^2 + \omega_1^2}{p^2 + \omega_2^2}}}{1 + \xi \sqrt{\frac{p^2 + \omega_1^2}{p^2 + \omega_2^2}}}.$$

Hier haben  $\omega_1$  und  $\omega_2$  dieselbe Bedeutung wie vorher; weiter ist:

$$(48) \quad \xi = \sqrt{\frac{L' + L''}{L' + L'' + 4L}} \leq 1.$$

## II. Der Transformatorleiter

Das Vierpolelement wird als unsymmetrischer verlustfreier Transformator mit Wicklungskapazität angenommen.

In diesem Falle erhält man die Impedanzen  $I$  und  $K$

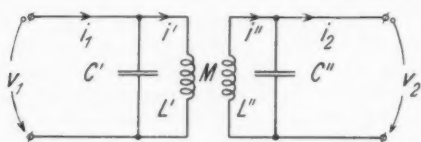


Fig. 6

nicht ganz so einfach wie im vorhergehenden. Es ist hier vorteilhafter, von den ursprünglichen Beziehungen zwischen primären und sekundären Strömen und Spannungen auszu-

gehen. Mit den Bezeichnungen der Fig. 6 lauten diese:

$$(a) \quad \begin{cases} v_1 = pL' \cdot i' + pM \cdot i'' = \frac{1}{pC'}(i_1 - i'), \\ -v_2 = pL'' \cdot i'' + pM \cdot i' = \frac{1}{pC''}(i_2 - i''). \end{cases}$$

Werden  $i'$  und  $i''$  hieraus eliminiert, geht das gesuchte System hervor:

$$(8) \begin{cases} (1 + p^2 L' C') \cdot v_1 - p L' \cdot i_1 = p^2 \cdot M \cdot C'' \cdot v_2 + p \cdot M \cdot i_2, \\ p^2 \cdot M C' \cdot v_1 - p \cdot M \cdot i_1 = (1 + p^2 L'' C'') \cdot v_2 + p \cdot L'' \cdot i_2. \end{cases}$$

Nun dividieren wir diese Gleichungen und führen die Impedanzen:  $Z_1 = \frac{v_1}{i_1}$ , und  $Z_2 = \frac{v_2}{i_2}$  ein. Dann wird:

$$(49) \quad \frac{(1 + p^2 L' C') \cdot Z_1 - p L'}{p^2 \cdot M C' \cdot Z_1 - p M} = \frac{p^2 \cdot M C'' \cdot Z_2 + p \cdot M}{(1 + p^2 L'' C'') \cdot Z_2 + p \cdot L''}.$$

Um endlich  $\lambda(p) = [\Gamma(p)]^2$  zu bekommen, müssen wir diese lineare Transformation auf die kanonische Form umschreiben. Dabei ergibt sich ein Ausdruck für  $\lambda$  von demselben Aussehen wie (45). Doch haben nun die Konstanten  $\omega$  und  $\kappa$  die folgende Bedeutung:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{L' + L'' + 2M}{(L' L'' - M^2)(C' + C'')}, \\ \omega_2^2 &= \frac{L' + L''}{(L' L'' - M^2)(C' + C'')}, \\ \omega_3^2 &= \frac{L' + L'' - 2M}{(L' L'' - M^2)(C' + C'')}, \\ \kappa &= 1. \end{aligned} \right.$$

Auch in diesem Falle liegt die Frequenz  $\omega'$  immer zwischen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ ; je nach dem Zeichen von  $M$  ist  $\omega_1 > \omega_2$  oder umgekehrt. Für  $\Gamma(p)$  gilt offenbar auch der Ausdruck (47) mit  $\xi = 1$ .

Wir wollen zunächst einen Ausdruck für die Primärfunktion  $\lambda(t)$  solcher Kettenleiter herleiten, bei denen  $\Gamma(p)$  die von (47) angegebene Form hat.

Der Definitionsformel (37a) gemäß wird  $\gamma(t)$  durch das komplexe Integral:

$$(51) \quad \gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1 - \xi \sqrt{\frac{p^2 + \omega_1^2}{p^2 + \omega_2^2}}}{1 + \xi \sqrt{\frac{p^2 + \omega_1^2}{p^2 + \omega_2^2}}} \cdot \frac{e^{pt}}{p} \cdot dp$$

bestimmt. Der Integrationsweg  $L$  ist dabei ursprünglich eine zur imaginären Achse parallele Gerade.

Der Integrand ist eine mehrdeutige Funktion mit den Verzweigungspunkten  $\pm i\omega_1$  und  $\pm i\omega_2$ . Wir benutzen im folgenden einen (eindeutigen) Zweig der Funktion, der mit

Hilfe zweier Schnitte zwischen den Paaren von Verzweigungspunkten gemäß Fig. 7 definiert sei. (Um die Verhältnisse näher zu präzisieren, nehmen wir an, es sei  $\omega_2 > \omega_1$ ; wenn

$\xi = 1$ , müssen wir den im Unendlichen verschwindenden Funktionszweig wählen).

Der Integrand besitzt im Ursprung einen einfachen Pol.

Nach einem Satze von Jordan ergibt sich der Wert Null bei Integration längs einem rechts konvexen unendlichen Halbkreise, falls  $t < 0$  ist, oder auch bei Integration einen links konvexen Halbkreis entlang, falls  $t > 0$  ist. Da keine Singularitäten rechts von  $L$  vorkommen, kann man offenbar bei negativen Werten von  $t$  diesen Weg in einen rechts konvexen Halbkreis deformieren, und wir schließen daraus, daß  $\gamma(t) \equiv 0$ , wenn  $t < 0$  ist.

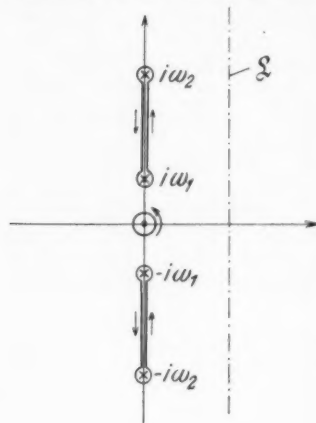


Fig. 7

Im Falle  $t > 0$  können wir den Weg  $L$  mit einem links konvexen unendlichen Halbkreis ergänzen, ohne den Wert des Integrals dadurch zu verändern. Dabei entsteht eine geschlossene Kurve, die nach dem Satze von Cauchy durch Schlingen um die Verzweigungsschnitte und den Pol ersetzt werden kann (vgl. Fig. 7). Der Pol gibt den Beitrag:  $2\pi i \cdot I(0)$ , wobei:

$$(52) \quad I(0) = \frac{1 - \xi \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}}{1 + \xi \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}}.$$

Die Beiträge der Integrationsschlingen um die Schnitte drückt man leicht durch reelle Integrale aus, indem man zuerst das Zeichen der Wurzel auf den verschiedenen Rändern feststellt. Wir setzen  $p = i\omega$  und benutzen die Bezeichnung:

$$(53) \quad \frac{1 - i\xi \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}}}{1 + i\xi \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega^2}}} = e^{-i \cdot \alpha(\omega)}.$$

Man findet zunächst für  $t > 0$ :

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma(t) = \Gamma(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega t - i\alpha(\omega)} \cdot \frac{d\omega}{\omega} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_2}^{\omega_1} e^{i\omega t + i\alpha(\omega)} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\omega_1}^{-\omega_2} e^{i\omega t - i\alpha(\omega)} \cdot \frac{d\omega}{\omega} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{i\omega t + i\alpha(\omega)} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \end{aligned} \right.$$

und nach einigen Umformungen:

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma(t) = \Gamma(0) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin[\omega t - \alpha(\omega)] \cdot \frac{d\omega}{\omega} \\ - \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin[\omega t + \alpha(\omega)] \cdot \frac{d\omega}{\omega} \end{aligned} \right.$$

oder auch:

$$(56) \quad \gamma(t) = \Gamma(0) - \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin[\alpha(\omega)] \cdot \cos \omega t \cdot \frac{d\omega}{\omega}.$$

Also haben wir für  $\gamma_1(t) = \gamma'(t)$  den Ausdruck:

$$(57) \quad \gamma_1(t) \equiv \gamma'(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin[\alpha(\omega)] \cdot \sin \omega t \cdot d\omega.$$

Der zu  $\Gamma(p)$  gehörende Integraloperator  $\Gamma$  ist gemäß (39a):

$$\Gamma = \left[ \gamma(0) + \int_0^t \gamma_1(t - \tau) \cdot d\tau \right].$$

Nach (56) wird:

$$(58) \quad \gamma(0) = \Gamma(0) - \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin[\alpha(\omega)] \cdot \frac{d\omega}{\omega}.$$

Diesen Wert auf  $\gamma(0)$  erhält man einfacher, wenn man nach den Regeln der Operatorenrechnung  $p = \infty$  in  $\Gamma(p)$  einführt; so ergibt sich auch:

$$(58a) \quad \gamma(0) = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}.$$

$\gamma(0)$  verschwindet also bei dem Transformatorleiter, wo  $\xi = 1$  ist.

Der Integraloperator  $\Gamma$  erhält die recht komplizierte Form:

$$(59) \quad \Gamma = \left[ \frac{1-\xi}{1+\xi} + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^t \left\{ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin[\alpha(\omega)] \cdot d\omega \right\} \sin \omega(t-\tau) \cdot d\tau \right].$$

Die gewonnenen Ausdrücke für  $\gamma(t)$  geben unmittelbar die Lösung der Operatorengleichung:

$$v_{k+1}(t) = [\Gamma(p)]^k \cdot H(t).$$

Hier mag  $v_{k+1}(t)$  die in das  $(k+1)$ te Glied eingehende Spannung bedeuten, wenn die elektromotorische Kraft  $H(t)$  am Anfang der Leitung eingeschaltet wird. Es ist unmittelbar aus den Herleitungen zu ersehen, daß wir, um  $v_{k+1}(t)$  zu bekommen, nur  $\Gamma(0)$  durch  $[\Gamma(0)]^k$  und  $\alpha(\omega)$  durch  $k \cdot \alpha(\omega)$  zu ersetzen brauchen. Somit erhalten wir aus (56):

$$(60) \quad v_{k+1}(t) = \left\{ [\Gamma(0)]^k - \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin[k \cdot \alpha(\omega)] \cdot \cos \omega t \cdot \frac{d\omega}{\omega} \right\} \cdot H(t).$$

Besonders bemerkenswert ist der der Formel (55) entsprechende Ausdruck für  $v_{k+1}(t)$ . Hier treten nämlich unter dem Integralzeichen Funktionen vom Typus:

$$\sin[\omega t \pm k \cdot \alpha(\omega)]$$

auf. Bei einer homogenen Leitung kommen ähnliche Funktionen vor, aber  $k$  ist dann dem kontinuierlichen Abstand  $x$  vom Anfang proportional, und die fraglichen Funktionen bedeuten physikalisch ungedämpfte, sinusförmige Wellen, die die Leitung entlang in der einen oder der anderen Richtung hinlaufen. Die Integrale in  $v_{k+1}(t)$  drücken eine Überlagerung unendlich vieler „Quasiwellen“ aus. In diesem Umstand sehen wir noch ein Beispiel der formalen Analogie zwischen Schwingungsvorgängen auf Kettenleitern und Wellensystemen auf homogenen Leitungen, die wir schon bei der Einführung der Reflexionskoeffizienten  $G'$  und  $G''$  bemerkt haben.

In vielen praktischen Fällen braucht man den Verlauf nur in der ersten Zeit nach dem Einschaltungs Augenblicke zu kennen; dann eignet sich besonders eine Potenzreihenentwicklung für  $\gamma(t)$ . Man kann eine solche z. B. aus (56) erhalten, indem man die Reihe für  $\cos \omega t$  einführt und gliedweise Integration bewerkstelligt; dabei erhält man die gesuchten Koeffizienten in der Gestalt noch auszuwertender bestimmter Integrale. Man kommt aber meistens einfacher zum Ziel, wenn



man  $\Gamma(p)$  nach Potenzen von  $1/p$  entwickelt und dann die bekannte Operatorenregel:

$$\frac{1}{p^n} \cdot H(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot H(t)$$

verwendet. Beschränken wir uns auf das Ausrechnen der ersten Glieder, so wird:

$$(61) \quad \Gamma(p) = \frac{1-\xi}{1+\xi} + \frac{\xi}{(1+\xi)^2} \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2) \cdot \frac{1}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^4}\right)$$

und also für  $t > 0$ :

$$(62) \quad \gamma(t) = \frac{1-\xi}{1+\xi} + \frac{\xi}{(1+\xi)^2} \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2) \cdot \frac{t^2}{2!} + O(t^4).$$

Als ein einfaches praktisches Beispiel rechnen wir einen ersten Näherungswert von  $v_{k+1}(t)$  bei einem Kettenleiter mit  $\xi = 1$  aus. Hier wird:

$$\Gamma(p) \sim \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4} \cdot \frac{1}{p^2}$$

und folglich:

$$(63) \quad v_{k+1}(t) \sim \left( \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4} \right)^k \cdot \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot H(t).$$

Diese Spannungen nehmen also von Glied zu Glied in demselben Maße wie die Glieder der Cos-Reihe ab.

Um nun die Siebeigenschaften des betrachteten Kettenleiters etwas näher zu analysieren, wollen wir die Spannung  $v_{k+1}(t)$  bei einer plötzlich eingeschalteten sinusförmigen elektromotorischen Kraft berechnen. Die letztere können wir in Operatorenform angeben:

$$(64) \quad e(t) = \sin \omega_0 t \cdot H(t) = \frac{\omega_0 p}{p^2 + \omega_0^2} \cdot H(t).$$

Dann erhalten wir für  $v_{k+1}(t)$  den Ausdruck:

$$(65) \quad v_{k+1}(t) = [\Gamma(p)]^k \cdot \frac{\omega_0 p}{p^2 + \omega_0^2} \cdot H(t)$$

und also die Integraldarstellung:

$$(65a) \quad v_{k+1}(t) = \frac{\omega_0}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \frac{1-\xi \sqrt{\frac{p^2+\omega_1^2}{p^2+\omega_2^2}}}{1+\xi \sqrt{\frac{p^2+\omega_1^2}{p^2+\omega_2^2}}} \right]^k \cdot \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega_0^2} \cdot dp.$$

Wir benutzen diesmal Verzweigungsschnitte, die nach Fig. 8 unter rechtem Winkel zur imaginären Achse von den

Punkten  $\pm i\omega_1$  und  $\pm i\omega_2$  herausgehen und in der linken Halbebene verlaufen.

Für  $t < 0$  ist  $v_{k+1}(t) \equiv 0$ . Für  $t > 0$  erhält man  $v_{k+1}(t)$  wie oben durch Integration rings um die Schnitte und die

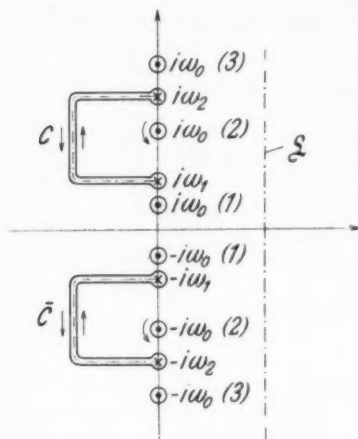


Fig. 8

Pole  $\pm i\omega_0$ . In der Figur sind die verschiedenen Fälle, die hinsichtlich der möglichen Lagen der Pole untersucht werden müssen, durch die Ziffern (1), (2) und (3) ausgezeichnet. Mittels Residuumsrechnung erhält man die folgenden Ausdrücke:

Fall (1) und (3),

d. h.  $\omega_0 < \omega_1$  bzw.  $\omega_0 > \omega_1$

$$(66a) \begin{cases} v_{k+1}(t) = U_{k+1}(t) \\ \cdot H(t) + e^{-k \cdot \beta(\omega_0)} \\ \cdot \sin \omega_0 t \cdot H(t). \end{cases}$$

Fall (2),

d. h.  $\omega_1 < \omega < \omega_2$

$$(66b) \begin{cases} v_{k+1}(t) = U_{k+1}(t) \\ \cdot H(t) + \sin[\omega_0 t \\ - k \cdot \alpha(\omega_0)] \cdot H(t). \end{cases}$$

Hier bedeutet:

$$(66c) \quad U_{k+1}(t) = \frac{\omega_0}{2\pi i} \cdot \int_{C+\bar{C}} \left[ \frac{1 - \xi \sqrt{\frac{p^2 + \omega_1^2}{p^2 + \omega_2^2}}}{1 + \xi \sqrt{\frac{p^2 + \omega_1^2}{p^2 + \omega_2^2}}} \right]^k \cdot \frac{e^{pt}}{p^3 + \omega_0^3} \cdot dp$$

und

$$(67) \quad \frac{1 - \xi \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_2^2}}}{1 + \xi \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_2^2}}} = e^{-\beta(\omega)},$$

$\alpha(\omega)$  ist wie vorher durch (53) definiert.

Den von den Verzweigungsschnitten herrührenden Bestandteil  $U_{k+1}(t)$  nennen wir das Ausgleichsglied. Dieses muß mit der Zeit verschwinden, denn offenbar wird bei großem positivem  $t$  und auf dem ganzen Integrationswege, mit Ausnahme der den Verzweigungspunkten nächstliegenden Stücke (wo der Integrand endlich bleibt) der Faktor  $e^{pt}$  verschwindend klein.

Die übrigbleibenden Glieder in (66a) und (66b) geben deshalb die stationäre Lösung (dieselbe, die man mittels der sogenannten symbolischen Methode in der Wechselstromtechnik erhält). In den Fällen (1) und (3) bekommt man ein längs der Leitung exponentiell abnehmendes Glied; im Falle (2) gibt es keine Dämpfung, dagegen eine Phasenverschiebung um einen konstanten Betrag  $\alpha(\omega_0)$  von Glied zu Glied. Wir können folglich sagen, daß sich der fragliche Kettenleiter wie ein Sieb verhält, das hauptsächlich Ströme und Spannungen des Frequenzintervalles  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$  durchläßt.

Der Charakter des späteren Teiles des Ausgleichungsvorganges läßt sich einfach qualitativ untersuchen. Zu diesem Zwecke wollen wir jetzt einen asymptotischen Ausdruck für  $U_{k+1}(t)$  ableiten. Zunächst berechnen wir den vom Punkte  $i\omega_1$  herrührenden Bestandteil. Da für große Werte von  $t$  nur die diesem Punkte naheliegenden Teile des Integrationsweges merkliche Beiträge geben, müssen wir offenbar in dem Integralausdruck:

$$(68) \quad I[i\omega_1] = e^{i\omega_1 t} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \left[ \frac{1 - \xi \sqrt{\frac{2i\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \sqrt{z}}}{1 + \xi \sqrt{\frac{2i\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \sqrt{z}}} \right]^k \cdot \frac{e^{zt}}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot dz$$

eine asymptotische Darstellung jenes Bestandteiles bekommen. Der Integrationsweg ist hier eine Schlinge, die in positivem Sinne die negative reelle Achse und den Ursprung der  $z$ -Ebene umkreist.

Um  $I[i\omega_1]$  für großes  $t$  auszuwerten benutzen wir die erste Annäherung:

$$(69) \quad \left[ \frac{1 - \xi \cdot \sqrt{\frac{2i\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \sqrt{z}}}{1 + \xi \cdot \sqrt{\frac{2i\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \sqrt{z}}} \right]^k \sim 1 - 2k\xi \cdot \sqrt{\frac{2i\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \sqrt{z}}.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes gibt offenbar den Beitrag Null, und wir bekommen:

$$(70) \quad I[i\omega_1] \sim -2k\xi \sqrt{\frac{2i\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \cdot \frac{e^{i\omega_1 t}}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi i} \cdot \int_{-\infty}^{(0+)} \sqrt{z} \cdot e^{zt} \cdot dz.$$

Das hier auftretende Integral kann leicht auf das Fehlerintegral zurückgeführt werden. Es ergibt sich:

$$(71) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \sqrt{z} \cdot e^{zt} \cdot dz = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-xt} \cdot dx = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

Nun führen wir dieses Resultat in (70) ein und schreiben dort  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$  anstatt  $\sqrt{i}$ ; dann erhalten wir:

$$(72a) \quad I[i\omega_1] \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \cdot \frac{k \cdot \xi \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot (1+i) \cdot \frac{e^{i\omega_1 t}}{t \cdot \sqrt{t}}.$$

Auf analoge Weise berechnen wir den Beitrag des Verzweigungspunktes  $-i\omega_1$ ; in diesem ist  $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$  zu setzen, und es wird:

$$(72b) \quad I[-i\omega_1] \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \cdot \frac{k \cdot \xi \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot (1-i) \cdot \frac{e^{-i\omega_1 t}}{t \cdot \sqrt{t}}.$$

Also haben wir:

$$(72) \quad \begin{cases} I[i\omega_1] + I[-i\omega_1] \sim \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \cdot \frac{k \cdot \xi \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \frac{1}{t \sqrt{t}} (\cos \omega_1 t - \sin \omega_1 t). \end{cases}$$

Die Beiträge der beiden anderen Verzweigungspunkte  $\pm i\omega_2$  werten wir nach derselben Methode aus; doch benutzen wir hier anstatt (69) den Näherungswert:

$$(73) \quad \left[ \frac{1 + \frac{i}{\xi} \cdot \sqrt{\frac{2i\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \cdot \sqrt{z}}{1 - \frac{i}{\xi} \cdot \sqrt{\frac{2i\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \cdot \sqrt{z}} \right]^k \sim 1 + \frac{2i}{\xi} \cdot k \cdot \sqrt{\frac{2i\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \cdot \sqrt{z}.$$

Endlich schlagen wir die Ausdrücke für:

$$I[i\omega_1] + I[-i\omega_1] \quad \text{und} \quad I[i\omega_2] + I[-i\omega_2]$$

zusammen und erhalten dabei die gesuchte asymptotische Form des Ausgleichungsvorganges:

$$(74) \quad \begin{cases} U_{k+1}(t) \sim \\ \frac{k}{\xi} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega_2^2} \cdot \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \cdot \frac{1}{t \cdot \sqrt{t}} \cdot \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) \\ - k \cdot \xi \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \cdot \frac{1}{t \cdot \sqrt{t}} \cdot \sin\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Dieser bekommt also mit der Zeit immer mehr den Charakter einer Summe von abklingenden Sinusschwingungen mit den Grenzfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ . Daß  $U_{k+1}(t)$  proportional mit Gliednummer  $k$  anwächst ist nicht merkwürdig, wenn man bedenkt, daß der Ausdruck (74) nur in asymptotischem Sinne gültig ist, und daß offenbar der Vorgang den Leiter entlang eine Art Verspätung erleiden muß.



Wir definieren wie früher die primäre und die sekundäre Impedanz  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  durch die Gleichungen:

$$v_1 = Z_1 \cdot i_1 \quad \text{und} \quad v_2 = Z_2 \cdot i_2.$$

Führen wir diese Ausdrücke in (76) ein, bekommen wir bei Elimination der Ströme aus dem erhaltenen System eine Beziehung zwischen  $Z_1$  und  $Z_2$  in der Form einer Determinantengleichung:

$$(77) \quad \begin{vmatrix} Z_{11} - Z_1 & Z_{12} & Z_{13} \dots Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} + Z_2 & Z_{23} \dots Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \dots Z_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} \dots Z_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir bezeichnen mit  $D$  die Systemdeterminante:

$$D = D(p) = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \dots Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \dots Z_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ Z_{n1} & Z_{n2} \dots Z_{nn} \end{vmatrix}$$

und mit  $D_{11}$ ,  $D_{22}$  und  $D_{12} = D_{21}$  die zu den Elementen  $Z_{11}$ ,  $Z_{22}$  und  $Z_{12} = Z_{21}$  gehörenden Adjunkten, endlich mit:

$$D_{12}^{12} \text{ das algebraische Komplement zu } \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}.$$

Aus (77) bekommt man nun leicht die lineare Transformation:

$$(78) \quad Z_1 = \frac{D_{22} \cdot Z_2 + D}{D_{12}^{12} \cdot Z_2 + D_{11}}.$$

Hieraus berechnet sich das Transformationsverhältnis  $\lambda(p)$ :

$$(79) \quad \lambda(p) = [\Gamma(p)]^2 = \frac{1 - \frac{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D \cdot D_{12}^{12}}}{D_{11} + D_{22}}}{1 + \frac{\sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + 4D \cdot D_{12}^{12}}}{D_{11} + D_{22}}}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen kann etwas umgeformt werden. Zunächst erhalten wir:

$$(D_{11} - D_{22})^2 + 4 \cdot D \cdot D_{12}^{12} = (D_{11} + D_{22})^2 - 4(D_{11} \cdot D_{22} - D \cdot D_{12}^{12}).$$

Nach einem bekannten Determinantensatze<sup>1)</sup> ist aber:

$$(80) \quad D_{11} \cdot D_{22} - D_{12} \cdot D_{21} = D \cdot D_{12}^{12}.$$

Also wird:

$$(81) \quad (D_{11} - D_{22})^2 + 4 \cdot D \cdot D_{12}^{12} = (D_{11} + D_{22})^2 - 4 \cdot D_{12}^2.$$

Mit Benutzung der Abkürzungen:

$$(82) \quad \begin{cases} A = D_{11} + D_{22} - 2 \cdot D_{12}, \\ B = D_{11} + D_{22} + 2 \cdot D_{12}, \end{cases}$$

können wir demnach (79) schreiben:

$$(83) \quad \lambda(p) = [\Gamma(p)]^2 = \frac{1 - \frac{\sqrt{AB}}{\frac{1}{2}(A+B)}}{1 + \frac{\sqrt{AB}}{\frac{1}{2}(A+B)}}.$$

oder endlich:

$$(84) \quad \Gamma(p) = \pm \frac{1 - \sqrt{\frac{A}{B}}}{1 + \sqrt{\frac{A}{B}}}.$$

Hier ist offenbar  $A/B$  immer der Quotient zweier Polynome im Operator  $p$ .

Damit haben wir eine für rationale Vierpole allgemeine analytische Form des Transmissionsoperators  $\Gamma(p)$  hergeleitet.

Um den Ausdruck (45) für  $\Gamma(p)$  auf diese kanonische Form (84) zu bringen brauchen wir nur:

$$A = (L' + L'') \cdot (p^2 + \omega_1^2); \quad B = (L' + L'' + 4L) \cdot (p^2 + \omega_2^2)$$

zu setzen; dann bekommen wir die Formel (47) wieder. Bei der Transformatorleiter wird noch einfacher:

$$A = p^2 + \omega_1^2; \quad B = p^2 + \omega_2^2.$$

Bei verlustfreien Kettenleitern sind die Nullstellen der Funktionen  $A(p)$  und  $B(p)$  rein imaginär. Aus der Form für  $\Gamma(p)$  erkennt man, daß die mathematische Behandlung der Einschwingungsvorgänge auf rationalen Kettenleitern charakteristischer Natur ist; durch die oben dargelegten einfachen Rechnungen haben wir dieselbe etwas näher erläutern wollen.

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. Determinantentheorie von G. Kowalewski, Leipzig 1909, S. 80.



**Anhang****I. Ableitung der Ausdrücke für Primär- und Sekundärstrom durch sukzessive Annäherung**

Bei der Behandlung der Vierpolgleichungen im ersten Abschnitt wurde erwähnt, daß die gewonnenen Ausdrücke sich auch durch wiederholte Anwendung des sog. Théveninschen Theorems ermitteln lassen. Da dieses Vorgehen von gewissem prinzipiellem Interesse ist und dazu einen klareren Einblick in die physikalische Natur der Ausdrücke erlaubt, wollen wir dasselbe etwas näher besprechen.

Unser Ausgangspunkt sind die Formeln (7), (11a, b) und (5c) des ersten Abschnitts:

$$(7a) \quad \begin{cases} i_1 = \frac{e'}{Z' + Z_1}, \\ i_2 = \frac{e''}{Z'' - Z_2}. \end{cases}$$

$$(11a, b) \quad \begin{cases} i_1 = C'' \cdot \left(1 + \frac{Z_2}{I''}\right) \cdot i_2, \\ i_2 = C' \cdot \left(1 - \frac{Z_1}{I'}\right) \cdot i_1. \end{cases}$$

$$(5c) \quad \frac{Z_1 - P}{Z_1 - Q} = \lambda \cdot \frac{Z_2 - P}{Z_2 - Q}.$$

Die zweite Gl. (7) haben wir dann unter Annahme eines sekundären elektromotorischen Kraft verallgemeinert.

Durch die nachstehende Fig. 10, die einen Vierpol und dessen verschiedene Anschlüsse schematisch darstellt, wird illustriert, wie man die ersten vier Annäherungsschritte ausführt.

Wir denken uns zunächst, daß sekundär eine Hilfsimpedanz vom Wert  $-(Z'' - P)$  mit der gegebenen Belastungsimpedanz  $Z''$  in Reihe geschaltet ist. Die resultierende Anschlußimpedanz ist dann  $P$ , d. h. die Sekundärseite ist iterativ angeschlossen. Aus (7a) folgt für  $e'' = 0$ , daß  $Z_2 = (Z'')^{(1)} = P$ . Also wird nach (5c) auch  $Z_1 = P$  und gemäß (7a) erhalten als ersten Näherungswert des Primärstromes:

$$i_1^{(1)} = \frac{e'}{Z' + P}.$$

Nach (11b) wird der entsprechende Sekundärstrom:

$$i_2^{(1)} = \gamma' \cdot i_1^{(1)},$$

wenn wir die Bezeichnung:

$$(85) \quad \gamma' = C' \cdot \left(1 - \frac{P}{I'}\right)$$

benutzen.

Um nun zum wirklichen Falle zu gelangen, müssen wir die Hilfsimpedanz  $-(Z'' - P)$  kurz schließen. Zu  $i_1^{(1)}$  und  $i_2^{(1)}$  müssen wir, um die wahren Ströme  $i_1$  und  $i_2$  zu bekommen,

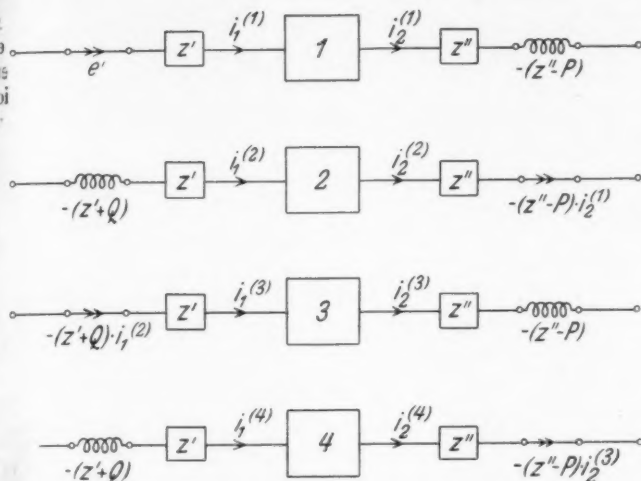


Fig. 10

die dabei eintretenden Änderungen in diesen Strömen hinzufügen. Nach dem Théveninschen Theorem sind diese gleich den Strömen  $i_1^*$  bzw.  $i_2^*$ , die entstehen würden, falls eine elektromotorische Kraft vom Wert  $-(Z'' - P) \cdot i_2^{(1)}$  in den kurzschließenden Zweig der Sekundärseite gelegt würde, und dabei keine primäre elektromotorische Kraft vorhanden wäre. Auf diese Ströme hat offenbar die Impedanz  $-(Z'' - P)$  keinen Einfluß. Die Berechnung von  $i_1^*$  und  $i_2^*$  ist natürlich mit denselben Schwierigkeiten wie eine direkte Berechnung von  $i_1$  und  $i_2$  behaftet. Wir berechnen aber anstatt dessen die Stromänderungen  $i_1^{(2)}$  und  $i_2^{(2)}$ , die, bei iterativem Anschluß der Primärseite mit der Impedanz  $-Q$ , durch eine sekundäre elektromotorische Kraft gleich  $-(Z'' - P) \cdot i_2^{(1)}$  entstehen würden. Zu diesem Zweck denken wir uns nun eine neue Hilfsimpedanz  $-(Z' + Q)$  in Reihe mit  $Z'$  geschaltet. Dann wird  $Z_1 = Q$ , also auch  $Z_2 = Q$  und wir erhalten nach (7a):

$$i_2^{(2)} = G'' \cdot i_2^{(1)}$$

mit der Bezeichnung:

$$G'' = - \frac{Z'' - P}{Z'' - Q}.$$

Die entsprechende Änderung des Primärstromes, nach (11a) berechnet, schreiben wir:

$$i_1^{(2)} = \gamma'' \cdot i_2^{(2)},$$

wobei also:

$$(85a) \quad \gamma'' = G'' \cdot \left(1 + \frac{Q}{P}\right).$$

Man sieht nun unmittelbar ein, wie sich der Prozeß wiederholen (iterieren) läßt. Im nächsten Schritt schließen wir durch einen Zweig mit der elektromotorischen Kraft

$$-(Z' + Q) \cdot i_1^{(2)}$$

unter gleichzeitigem iterativem Anschluß  $P$  der Sekundärseite, die Impedanz  $-(Z' + Q)$  kurz. Dabei ergibt sich die Primärstromänderung:

$$i_1^{(3)} = G' \cdot i_1^{(2)},$$

falls wir

$$G' = - \frac{Z' + Q}{Z' + P}$$

setzen, und die Sekundärstromänderung:

$$i_2^{(3)} = \gamma' \cdot i_1^{(3)}.$$

Die sukzessiven Stromänderungen werden folglich durch die Rekursionsformeln dargestellt:

$$(86) \quad \begin{cases} i_1^{(2n+1)} = G' \cdot i_1^{(2n)}, \\ i_2^{(2n+1)} = \gamma' \cdot i_1^{(2n+1)}, \\ i_2^{(2n)} = G'' \cdot i_2^{(2n-1)}, \\ i_1^{(2n)} = \gamma'' \cdot i_2^{(2n)}. \end{cases}$$

Indem man immer mehr solche Stromänderungen superponiert, bekommt man immer bessere Annäherungen, und wenn der Prozeß ad infinitum fortgesetzt wird, müssen als Resultat die gesuchten wahren Ströme  $i_1$  und  $i_2$  hervorgehen. Somit findet man:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_1^{(1)} + i_1^{(2)} + i_1^{(3)} + \dots \\ &= (1 + \gamma' \gamma'' \cdot G'') \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma' \cdot \gamma'' \cdot G' \cdot G'')^k \cdot i_1^{(1)}, \\ i_2 &= i_2^{(1)} + i_2^{(2)} + i_2^{(3)} + \dots \\ &= \gamma' \cdot (1 + G'') \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma' \cdot \gamma'' \cdot G' \cdot G'')^k \cdot i_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch formale Summierung der geometrischen Reihen folgende geschlossenen Ausdrücke für Primär- und Sekundärstrom:

$$(87) \quad \begin{cases} i_1 = \frac{1 + \gamma' \cdot \gamma'' \cdot G''}{1 - \gamma' \cdot \gamma'' \cdot G' \cdot G''} \cdot \frac{e'}{Z' + P}, \\ i_2 = \frac{\gamma' (1 + G'')}{1 - \gamma' \cdot \gamma'' \cdot G' \cdot G''} \cdot \frac{e'}{Z' + P}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Definitionsformeln für  $\gamma'$  und  $\gamma''$  samt im ersten Abschnitt gegebenen Beziehungen zwischen den ursprünglichen und den kanonischen Daten des Vierpols, verifiziert man einfach, daß:

$$\gamma' = \gamma'' = \pm \sqrt{\lambda}.$$

Folglich sind die abgeleiteten Ausdrücke für  $i_1$  und  $i_2$  mit den im ersten Abschnitt gegebenen (9) und (16) ganz gleichwertig.

## II. Definition und Eigenschaften des Dreikreisleiters

Jedes elektrische Leitungssystem ist von den Grundelementen: Induktanz, Kapazität und Widerstand (Ableitung) aufgebaut. Vom Gesichtspunkt der Operatorenrechnung aus ist es zweckmäßig, die folgenden Bezeichnungen einzuführen:

Unter einem allgemeinen Impedanzkreiselement verstehen wir eine Induktanz, eine Kapazität und einen Widerstand in Reihe geschaltet.

Unter einem allgemeinen Admittanzkreiselement verstehen wir eine Induktanz, eine Kapazität und eine Ableitung parallel geschaltet.

Die Operatorenausdrücke  $Z(p)$  bzw.  $Y(p)$  zweier solcher Elemente sind offenbar analytisch gleichwertig, indem

$$Z(p) = pL + R + \frac{1}{pC}; \quad Y(p) = pC + A + \frac{1}{pL}.$$

*Definition.* Unter einem Dreikreisleiter verstehen wir einen Kettenleiter, dessen Glieder entweder von drei Impedanzkreiselementen in Sternschaltung oder auch von drei Admittanzkreiselementen in Dreieckschaltung aufgebaut sind.

*Bemerkung.* Vierpole der angegebenen Art, bei denen die eine Kupplungsklemme prinzipiell überflüssig ist, werden auch Dreipole genannt.

Mit der allgemeinen Formel (21a) für  $[\Gamma(p)]^3$  als Ausgangspunkt beweist man einfach folgenden für Dreikreisleiter allgemein gültigen Ausdruck des Transmissionsoperators:

$$(88) \quad \Gamma(p) = \frac{1 - \sqrt{\frac{U' + U''}{U' + U'' + 4U}}}{1 + \sqrt{\frac{U' + U''}{U' + U'' + 4U}}}.$$

Hier bezeichnen  $U, U', U''$  die drei Impedanzkreiselemente  $Z, Z', Z''$  oder die drei Admittanzkreiselemente  $Y, Y', Y''$ , wie es die nachstehenden Diagramme näher erleuchten.

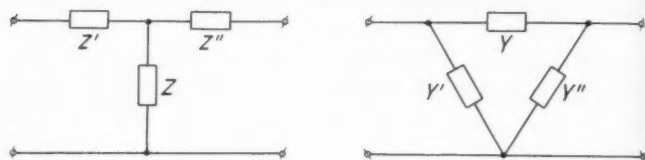


Fig. 11

Aus (88) ist zu ersehen, daß bei allen Dreikreisleitern analytisch gleichwertige Ausdrücke für den Transmissionsoperator erhalten werden.

Wir bemerken noch, daß eine Dreieckschaltung von Impedanzkreiselementen oder eine Sternschaltung von Admittanzkreiselementen keinen Dreikreisleiter darstellt; in der Tat erhält man in diesen Fällen einen komplizierteren Operator  $\Gamma(p)$  mit in der Regel vier Paaren von Verzweigungspunkten.

Stockholm, Stockholms Högskola, Instit. f. Mekanik och Matematisk Fysik.

(Eingegangen 27. August 1934)

**Über die exakten Lösungen  
einiger Potentialprobleme aus der Elektrotechnik  
bei einer speziellen Klasse von Randkurven**

**Von Konstantin Dahr**

(Mit 4 Figuren)

**1. Allgemeine Theorie für Berechnung von induzierten Ladungen  
auf zylindrischen Grenzflächen**

Wir bezeichnen mit  $C$  die Spurkurve in der Normalebene der Erzeugenden von einer Zylinderfläche, welche zwei verschiedene, homogene und isotrope Medien trennt. In der Elektrotechnik ist es von Bedeutung, das elektrische und das magnetische Feld in den beiden Medien willkürlich verteilter Linienladungen bzw. Stromfäden berechnen zu können. Da die Dielektrizitätskonstante und, falls ferromagnetische Stoffe außer Betracht gelassen werden, auch die Permeabilität von der Feldstärke unabhängige Konstanten sind, mag das Superpositionsprinzip benutzt werden. Die eben erwähnten

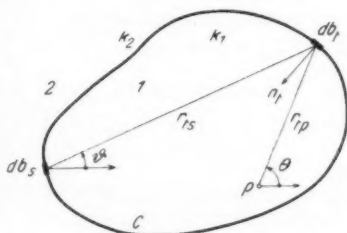


Fig. 1

Probleme sind deswegen als prinzipiell gelöst zu betrachten, falls man die Lösung für einen einzigen willkürlich belegten Ladungs- bzw. Stromfaden gefunden hat. Auf der Grenzfläche zwischen den beiden Medien tritt induzierte Ladung auf, deren Potentialfeld sich zum Primärfeld addiert. Offenbar besteht der Kernpunkt der Probleme in der Berechnung der induzierten Ladungen. Wir werden zuerst zeigen, wie die Ladungsdichte durch eine Integralgleichung bestimmt werden kann; diese Gleichung ist übrigens für die allgemeine zweite Randwertaufgabe (das sogenannte Robin-Poincarésche Problem) charakteristisch.

Mit  $\varepsilon(t)$ , wo  $t$  etwa ein Parameter sein mag, wollen wir die Flächendichte der induzierten Ladung bezeichnen; diese wird dabei pro Längeneinheit der Randkurve  $C$  und der Erzeugenden gemessen. Das von der Flächenbelegung in einem Punkte  $p$  herrührende Potential wird dann (vgl. Fig. 1):

$$(1) \quad V(p) = 2 \oint_C \varepsilon(t) \cdot \log \frac{1}{r_{tp}} \cdot db_t.$$

Für das Potential einer einfachen Belegung gelten bekanntlich die Randbedingungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 - \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 \right] = 2\pi \cdot \varepsilon(t), \\ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 + \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 \right] = 2 \oint_C \varepsilon(s) \cdot \frac{\cos(n_t, r_{ts})}{r_{ts}} \cdot db_s. \end{cases}$$

Nach der Figur ist:

$$\frac{\cos(n_t, r_{ts})}{r_{ts}} \cdot db_s = \frac{\partial \vartheta}{\partial b_t} \cdot db_s.$$

Führen wir die Bezeichnungen:

$$(3) \quad \psi(t) = 2\varepsilon(t) \cdot \frac{db_t}{dt},$$

$$(4) \quad f(s, t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial \vartheta(s, t)}{\partial t} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \arctg \frac{y(t) - y(s)}{x(t) - x(s)}$$

ein, bekommen die Gl. (2) die folgende Form:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 - \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 \right] \cdot \frac{db_t}{dt} = \psi(t), \\ \frac{1}{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 + \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 \right] \cdot \frac{db_t}{dt} = \int_a^b f(s, t) \cdot \psi(s) \cdot ds. \end{cases}$$

Dabei wird angenommen, daß die Grenzkurve  $C$  einmal durchlaufen wird, wenn der Parameter von  $a$  bis  $b$  variiert. Jetzt brauchen wir nur die letzte Gleichung mit  $\lambda$  zu multiplizieren und dann die Gleichungen zu addieren, so bekommen wir mit der Bezeichnung:

$$(6) \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{db_t}{dt} \left[ (1 + \lambda) \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 - (1 - \lambda) \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 \right],$$

die gesuchte Integralgleichung für  $\psi(t)$  in der gewöhnlichen Form:

$$(7) \quad \psi(t) + \lambda \cdot \int_a^b f(s, t) \cdot \psi(s) \cdot ds = h(t).$$



Die Funktion  $h(t)$  wird nun aus dem primären Potentialfeld und den Materialkonstanten auf folgende Weise bestimmt:

Wir benutzen die Bezeichnungen:

$W$ : das totale (wirkliche) Potential.

$U$ : das von der gegebenen Ladungs- oder Stromverteilung herrührende (primäre) Potential.

Offenbar ist:

$$(8) \quad W = U + V.$$

Bedeutend  $k_1$  und  $k_2$  die Dielektrizitätskonstanten bzw. die Permeabilitäten der beiden Medien, so haben wir nach dem Gesetz von der stetigen Normalkomponente des elektrischen Verschiebungsvektors bzw. der magnetischen Induktion die Relation:

$$(9) \quad k_1 \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial n} \right)_1 = k_2 \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial n} \right)_2.$$

Wegen der Stetigkeit des Primärfeldes an der Grenzfläche folgt aus den letzten Gleichungen:

$$(10) \quad k_2 \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 - k_1 \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 = -(k_2 - k_1) \cdot \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Aus (10) und (6) finden wir einfach die folgenden Ausdrücke für  $\lambda$  und  $h(t)$ :

$$(11) \quad \lambda = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1},$$

$$(12) \quad h(t) = -\frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \cdot \frac{db_t}{dt}.$$

Um diese für ganz willkürliche Primärfelder brauchbare Formel für  $h(t)$  hinsichtlich der vorliegenden Fragestellung zweckmäßig zu spezialisieren führen wir jetzt komplexe Variablen  $z$  und  $w$  ein (vgl. Fig. 1):

$$(13) \quad \begin{cases} z = r_{tq} \cdot e^{i\Theta}, \\ w = u + iv = \log \frac{1}{z}, \\ u = \log \frac{1}{r_{tq}}, \quad v = -\Theta + (2\pi \cdot k). \end{cases}$$

Wählen wir nun als  $U$  das Potential einer Linienladung von der Stärke  $q$  (= „wahre“ Ladung pro Längeneinheit), wird:

$$(14) \quad U = \frac{2q}{k} \cdot \log \frac{1}{r_{tq}} = \frac{2q}{k} \cdot u,$$

wobei  $k = k_1$  oder  $k = k_2$ , je nach dem  $q$  im Inner- oder Außen- gebiete gelegen ist. Gemäß der Cauchyschen Gleichung:

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = - \frac{\partial v}{\partial b_i},$$

erhalten wir aus (12) und (14) den gesuchten Ausdruck:

$$(16) \quad h(t) = - \frac{2q}{k} \cdot \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\partial \Theta(t)}{\partial t}.$$

Wählen wir anstatt dessen als  $U$  das (durch eine geeignete Sperrfläche eindeutig definierte) magnetische Potential eines Stromfadens von der Stärke  $j$ , so wird:

$$(17) \quad U = 2j \cdot \int_0^\Theta \frac{1}{r} \cdot r \cdot d\Theta = 2j\Theta = -2j \cdot v.$$

Setzen wir dies in (12) ein und benutzen die zweite Cauchysche Gleichung:

$$(15a) \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial b_i},$$

erhalten wir:

$$(18) \quad h(t) = 2j \cdot \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \log \frac{1}{r_{tj}} \right).$$

Wir wollen noch einige allgemeine Eigenschaften der Ladungsdichte und des Potentials kurz besprechen. Wir nennen:

$$(19) \quad m_i = 2 \oint_C \epsilon(t) \cdot db_i = \int_a^b \psi(t) \cdot dt,$$

die Totalmasse der induzierten Ladung und erhalten gemäß (7) und (12):

$$(20) \quad m_i = - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \oint_C \frac{\partial U}{\partial n} \cdot db_i.$$

Die Totalmasse verschwindet also, wenn das Primärpotential überall innerhalb  $C$  regulär ist.

In dem Fall, wo  $U$  von einer Linienladung herrührt, wird nach (14), (15) und (16):

$$m_i = - \frac{2q}{k} \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\partial \Theta}{\partial t} \cdot dt.$$

Gemäß der geometrischen Bedeutung von  $\Theta$  folgt hieraus:

$$m_i = 0, \text{ wenn } q \text{ außerhalb } C \text{ liegt,}$$

$$m_i = - \frac{2\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{2q}{k_1}, \text{ wenn } q \text{ innerhalb } C \text{ liegt.}$$

Der Fall, wo  $q$  auf  $C$  liegt, wird unbestimmt bereits aus dem Grunde, daß man dort  $k$  keinen bestimmten Wert zuschreiben kann.

Bei Benutzung von (11) bekommen wir im zweiten Fall:

$$(21) \quad m_i = -\frac{2q}{k_1} \cdot \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right).$$

Wir bezeichnen gelegentlich mit  $m_1 = \frac{2q}{k_1}$  die der Ladung  $q$  entsprechende „Masse“ und mit  $m = m_1 + m_i$  die „Gesamtmasse“ und erhalten dann

$$(22) \quad m = \frac{2q}{k_2}.$$

Dies ist aber eben der Wert der Masse, wenn die Ladung  $q$  außerhalb der Kurve  $C$  liegt und die totale induzierte Ladung gleich Null ist. Damit ist bewiesen, daß die Totalmasse des Gesamtpotentials  $W$ , unabhängig vom Orte der wahren Ladung  $q$ , den von (22) angegebenen Wert hat. In der Umgebung des unendlich fernen Punktes setzt sich demgemäß  $W$  aus einem logarithmischen Glied und einem im Unendlichen verschwindenden regulären Potential zusammen.

Wenden wir uns nun dem Falle zu, wo  $U$  von einem Stromfaden  $j$  herrührt, so sehen wir sogleich wie oben ein, daß  $m_i = 0$  ist, wenn  $j$  außerhalb  $C$  liegt. Dies gilt aber auch, wenn  $j$  innerhalb  $C$  liegt, wie man am einfachsten aus (20) unter Berücksichtigung von (17), (15a) und (13) verifiziert.

Endlich erwähnen wir noch eine charakteristische Eigenschaft des Potentialfeldes einer Linienladung.

Gesetzt, eine Ladung von der Größe 1 befindet sich im Punkte  $q$ . Das Gesamtpotential  $W$  in einem anderen Punkte  $p$  wird dann eine gewisse Funktion der beiden Punkte  $p$  und  $q$ , welche  $G(p, q)$  heißen mag. Diese zu benennende Greensche Funktion des vorliegenden Randwertproblems besitzt folgende kennzeichnenden Eigenschaften:

1.  $G(p, q)$  ist in jedem endlichen Gebiete, den Punkt  $q$  und die Randkurve  $C$  ausgeschlossen, eine reguläre Potentialfunktion von  $p$ , welche auf  $C$  der Randbedingung:

$$(23) \quad k_1 \left( \frac{\partial G}{\partial n} \right)_1 = k_2 \left( \frac{\partial G}{\partial n} \right)_2$$

genügt.

In der Umgebung von  $q$  gilt:

$$(24) \quad G(p, q) = \frac{2}{k} \cdot \log \frac{1}{r_{pq}} + u(p, q),$$

wo  $k = k_1$ ,

wenn  $q$  innerhalb  $C$  liegt,

$$\text{aber } k = k_2,$$

wenn  $q$  außerhalb  $C$  liegt, und  $u(p, q)$  ein im Punkte  $q$  reguläres Potential ist.

2. Im Unendlichen verhält sich  $G(p, q)$  unabhängig von der Lage von  $q$  innerhalb oder außerhalb  $C$ , wie ein Potential mit der Masse  $m = \frac{2}{k_2}$ .

Hier gilt also die Darstellung:

$$(25) \quad G(p, q) = \frac{2}{k_2} \cdot \log \frac{1}{r_{pq}} + u(p, q),$$

wo  $u(p, q)$  ein im Unendlichen verschwindendes Potential bedeutet.

Mit Verwendung von wohlbekannten Methoden aus der Potentialtheorie beweist man ohne Schwierigkeit, daß die Greensche Funktion der Symmetrirelation:

$$(26) \quad G(p, q) = G(q, p)$$

genügt. Diese spricht das physikalische Verhältnis aus, daß eine Ladung im Punkte  $q$  dasselbe Potential im Punkte  $p$  verursacht, das dieselbe Ladung in  $q$  erzeugen würde, wenn sie in  $p$  angebracht wäre. Da offenbar dem Potential  $U(p, q)$  einer Linienladung diese Eigenschaft zukommt, muß auch das Potential  $V(p, q)$  von der induzierten Ladung dieselbe Reziprozität aufweisen, d. h.

$$(27) \quad V(p, q) = V(q, p),$$

vorausgesetzt, daß  $p$  und  $q$  in demselben Medium liegen, damit die freie Ladung in beiden Punkten dieselbe ist.

## 2. Anwendung der allgemeinen Theorie auf eine spezielle Klasse von Randkurven

Die praktische Lösbarkeit der oben dargelegten Probleme hängt offenbar von der Möglichkeit ab, eine explizite Form für die Lösung der Integralgleichung (7) zu finden. Bekanntlich kann dieselbe geschrieben werden:

$$(7a) \quad \psi(t) = h(t) - \lambda \int_a^b g(s, t; \lambda) \cdot h(s) \cdot ds,$$

wo  $g(s, t; \lambda)$  die zum Kerne  $f(s, t)$  [vgl. (4)] gehörige Resolvente bezeichnet. In der Theorie der Integralgleichungen werden gewisse allgemeine Ausdrücke für  $g(s, t; \lambda)$  hergeleitet, z. B. die Neumannsche Reihenform und die Fredholmsche Deter-

minar  
des  
drück  
sie a  
begre  
solch  
Form  
größt  
sicht  
Dort  
iterie  
prim  
brais  
Funk  
den  
Weg  
reell  
satze  
such  
vom  
drück  
prob  
kürli  
ents  
des  
halte  
stän  
kom  
dem  
prak  
klas  
trisc  
feld  
such  
wir  
dem

Var  
trisc

Act  
the  
Astr

minantenform. Obwohl von größter Bedeutung für das Studium des analytischen Charakters der Lösungen, sind diese Ausdrücke für den praktischen Gebrauch wenig zweckmäßig, da sie aus Gliedern aufgebaut sind, die Multiplikative Integrale von unbegrenzt wachsender Ordnung enthalten. Unsere Kenntnis von solchen Fällen, wo diese Integrale gemäß einer generellen Formel berechnet werden können, ist sehr beschränkt. Von größter Bedeutung ist deshalb der Beitrag, den in jener Hinsicht Fredholm in einer späteren Abhandlung gegeben hat<sup>1)</sup>. Dort werden von Integralzeichen befreite Ausdrücke für die iterierten Kerne willkürlicher Ordnung hergeleitet, die zu primären Kernen einer recht umfassenden Klasse von algebraischen Kurven gehören. Bedeutet  $z = \Phi(s)$  eine rationale Funktion der komplexen Variable  $s$ , die gewissen einschränkenden Anforderungen genügt, so wird eine solche Kurve von dem Wege definiert, den  $z$  in ihrer Ebene beschreibt, wenn  $s$  die reelle Achse der  $s$ -Ebene durchläuft. In einem früheren Aufsatze<sup>2)</sup> hat der Verf. die Methode Fredholms bei der Untersuchung einer Integralgleichung benutzt, die dem Falle, wo  $\Phi(s)$  vom zweiten Grad ist, entspricht. Die dabei erhaltenen Ausdrücke für die Resolvente geben die Lösungen der Randwertprobleme u. a. bei solchen Kurven, die durch Inversion willkürlicher Ellipsen bezüglich innerhalb derselben gelegener Zentren entstehen. Bei passender Wahl von Exzentrizität und Lage des Inversionszentrums kann man auf diesem Wege Kurven erhalten, die ganz oder zum Teil und mehr oder weniger vollständig den Spurkurven häufig in der Elektrotechnik vorkommender zylindrischer Grenzflächen gleichen. Es ist deswegen dem Verf. von nicht nur theoretischem, sondern auch von praktischem Interesse erschienen, auf die bezügliche Kurvenklasse die oben beschriebene Methode zur Berechnung von elektrischen und magnetischen Ladungsverteilungen und Potentialfeldern anzuwenden. Im folgenden werden einige Untersuchungen mit diesem Ziele kurz besprochen. Zuvor müssen wir jedoch über gewisse immer zu verwendende Formeln aus dem zitierten Aufsatze eine kurze Zusammenfassung geben.

Anstatt der Variablen  $s$  und  $t$  in (7) und (7a) mit dem Variabilitätsbereich  $-\infty$  bis  $+\infty$  benutzen wir trigonometrische Variablen  $\sigma$  bzw.  $\tau$ , die (einer im Aufsatze ver-

1) I. Fredholm, Sur une équation intégrale à noyau analytique. Acta Math. Bd. 45. 1925.

2) K. Dahr, Researches upon an integral equation exemplifying the use of a general method due to Fredholm. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik Bd. 25 A nr 3. Stockholm 1934.

wendeten Definition gemäß) zwischen  $2\pi$  und 0 variieren. Dementsprechend lautet die Integralgleichung:

$$(28) \quad \Psi(\tau) - \lambda \cdot \int_0^{2\pi} F(\sigma, \tau) \cdot \Psi(\sigma) \cdot d\sigma = H(\tau)$$

und deren Lösung:

$$(28a) \quad \Psi(\tau) = H(\tau) + \lambda \cdot \int_0^{2\pi} G(\sigma, \tau; \lambda) \cdot H(\sigma) \cdot d\sigma.$$

Zwischen den vorigen Funktionen von  $t$  und den jetzigen von  $\tau$  bestehen dabei die Relationen:

$$(29) \quad \psi(t) \cdot dt = \Psi(\tau) \cdot d\tau, \quad h(t) \cdot dt = H(\tau) d\tau.$$

Um die Randkurve  $C$  zu definieren, die ja, wenn  $\sigma$  zwischen 0 und  $2\pi$  variiert, von der Variable  $z = \Phi(\sigma)$  beschrieben werden soll, führen wir elliptische Koordinaten ein, die einer Schar konfokaler Ellipsen mit dem Brennpunkt-abstand  $2c$  und zugehörigen hyperbolischen Orthogonaltrajektorien entsprechen. Wir bezeichnen also mit  $\sigma$  (oder  $\tau$ ) und  $\rho$  die Koordinaten eines Punktes auf der gegebenen Ellipse. [Man vgl. Fig. 2 über die geometrische Bedeutung von  $\sigma$  (oder  $\tau$ )!]

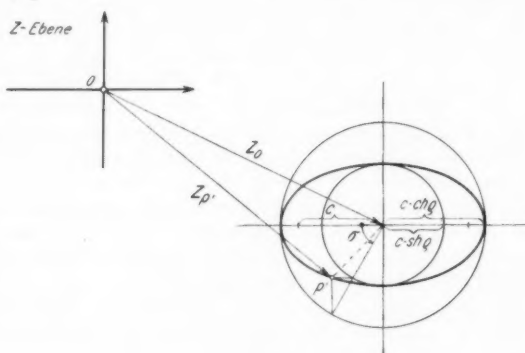


Fig. 2

Weiter mögen  $\zeta$  und  $\eta$  die elliptischen Koordinaten des Inversionzentrums bedeuten. Es ist dann einfach, die folgende Gleichung der Definitionsfunktion  $\Phi(\sigma)$  für  $C$  zu verifizieren:

$$(30) \quad z = \Phi(\sigma) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\cos(\zeta - i\eta) - \cos(\sigma - i\rho)}.$$

Offenbar werden die Koordinaten  $\varrho$ ,  $\zeta$  und  $\eta$  als charakteristische Parameter in den Ausdrücken für die Kerne  $F(\sigma, \tau)$  und  $G(\sigma, \tau; \lambda)$  eingehen. Anstatt  $\lambda$  führen wir einen Exponent  $\kappa$  nach der Definition:

$$(31) \quad \lambda = e^{-2\kappa}$$

ein. In dem oben erwähnten Aufsätze wurden die folgenden trigonometrischen Entwicklungen für die beiden Kerne bewiesen:

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\sigma, \tau) &= -\frac{1}{2\pi} \\ &+ \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu\varrho} (\operatorname{ch} \nu\eta \cdot \cos \nu\zeta \cdot \cos \nu\tau \\ &\quad + \operatorname{sh} \nu\eta \cdot \sin \nu\zeta \cdot \sin \nu\tau) \\ &+ \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-2\nu\varrho} \cdot \cos \nu(\sigma + \tau). \end{aligned} \right.$$

$$(32a) \quad \left\{ \begin{aligned} G(\sigma, \tau; \kappa) &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{\kappa}}{\operatorname{ch} \kappa} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{2} + e^{\kappa} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \nu\eta \cdot \cos \nu\zeta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu\varrho)} \cdot \cos \nu\tau \right. \\ &\quad \left. + e^{\kappa} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \nu\eta \cdot \sin \nu\zeta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu\varrho)} \cdot \sin \nu\tau \right\} \\ &+ \frac{e^{\kappa}}{2\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu\varrho} \cdot \frac{\cos \nu\tau \cdot \cos \nu\sigma}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu\varrho)} \\ &\quad - \frac{e^{\kappa}}{2\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu\varrho} \cdot \frac{\sin \nu\tau \cdot \sin \nu\sigma}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu\varrho)}. \end{aligned} \right.$$

Die Konvergenz dieser Reihen verlangt, daß  $\varrho > \eta$  ist, d. h. das Inversionszentrum muß innerhalb der Primärellipse liegen.

Vom Ausdrucke (32a) werden wir bei allen Ladungsdichteberechnungen ausgehen. Dank der trigonometrischen Form der Resolvente wird eine einfache Auswertung der in den Formeln vorkommenden Integrale ermöglicht.

### 3. Nähere Untersuchung

des elektrostatischen Problems bei der vorgelegten Kurvenklasse

Das Potential im Punkte  $p$  der von der wahren Ladung  $q$  auf  $C$  induzierten Ladung wird durch den Integraalausdruck (1)



bestimmt, der nach (3) auf folgende Weise geschrieben werden kann:

$$(33) \quad V(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \cdot \log \frac{1}{r_{tp}} \cdot dt.$$

Wenn man anstatt  $t$  die soeben eingeführte Winkelkoordinate  $\tau$  als Integrationsvariabel nimmt, wird:

$$(33a) \quad V(p, q) = - \int_0^{2\pi} \Psi(\tau) \cdot \log \frac{1}{r_{\tau p}} \cdot d\tau.$$

Für  $\Psi(\tau)$  haben wir den Ausdruck (28a) einzusetzen; die dort vorkommende Funktion  $H(\tau)$  hat beim elektrostatischen Probleme nach (16) und (29) die Bedeutung:

$$(34) \quad H(\tau) = - \frac{2q}{k} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau}.$$

Die explizite Berechnung von  $V(p, q)$  gründet sich auf die Möglichkeit, sowohl für  $\Psi(\tau)$  als auch für  $\log \frac{1}{r_{\tau p}}$  trigonometrische Darstellungen derselben Art wie für die Resolvente zu erhalten. Wir benutzen wieder die elliptischen Koordinaten mit den folgenden Bezeichnungen (vgl. Fig. 3):

- $\tau$  (oder  $\sigma$ ): ein beliebiger Punkt auf der Randkurve  $C$ .
- $\tau'$  (oder  $\sigma'$ ): der korrespondierende inverse Punkt auf der Primärellipse.
- $q$ : der Punkt, wo sich die Linienladung befindet.
- $q'$ : der zugehörige inverse Punkt.
- $p$ : der Aufpunkt, dessen Potential berechnet werden soll.
- $p'$ : der zugehörige inverse Punkt.

Die elliptischen Koordinaten bezeichnen wir:

- Für das Inversionszentrum (der Ursprung) mit:  $\eta, \zeta$   
 „ den Bildpunkt  $\tau'$  (oder  $\sigma'$ ) „ :  $\varrho, \tau$  (oder  $\sigma$ )  
 „ „ „  $q'$  „ :  $\varepsilon, \omega$   
 „ „ „  $p'$  „ :  $\beta, \alpha$ .

Die zweite Koordinate soll in sämtlichen Fällen die Winkelkoordinate sein.

Wir betrachten nun in einer komplexen Zahlenebene, deren Ursprung mit dem Inversionszentrum zusammenfällt, und deren Achsen mit den Achsen der Ellipse parallel sind, die Differenz [vgl. (13)]:

$$(35) \quad z = z_\sigma - z_q = r_{\sigma q} \cdot e^{i\Theta_{\sigma q}}.$$



Führen wir nun elliptische Koordinaten ein, so wird:

$$(38) \quad z_{\sigma'} = c [\cos(\zeta - i\eta) - \cos(\sigma - i\rho)],$$

$$(39) \quad z_{q'} = c [\cos(\zeta - i\eta) - \cos(\omega - i\varepsilon)]$$

und also:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\sigma, q} = \log c \\ + \log [\cos(\zeta - i\eta) - \cos(\sigma - i\rho)] \\ + \log [\cos(\zeta - i\eta) - \cos(\omega - i\varepsilon)] \\ - \log [\cos(\sigma - i\rho) - \cos(\omega - i\varepsilon)]. \end{array} \right.$$

Durch triviale Umformungen, die hier übergangen werden mögen, beweist man, daß, falls

$$\eta \leq \eta_0 < \rho,$$

die folgende Entwicklung unter gleichmäßiger Konvergenz gilt:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log [\cos(\zeta - i\eta) - \cos(\sigma - i\rho)] \\ = \log \frac{1}{2} + \rho + i\sigma + i \cdot (2k+1) \cdot \pi \\ - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu\rho}}{\nu} \cdot (\operatorname{ch} \nu\eta \cdot \cos \nu\zeta \cdot \cos \nu\sigma + \operatorname{sh} \nu\eta \cdot \sin \nu\zeta \cdot \sin \nu\sigma) \\ + i \cdot 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu\varepsilon}}{\nu} (\operatorname{ch} \nu\eta \cdot \cos \nu\zeta \cdot \sin \nu\sigma - \operatorname{sh} \nu\eta \cdot \sin \nu\zeta \cdot \cos \nu\sigma) \end{array} \right.$$

Bei Verwendung dieses Satzes auf die drei letzten Glieder des Ausdruckes für  $P_{\sigma, q}$  muß man die folgenden Fälle einzeln untersuchen:

$$\text{I: } \varepsilon > \rho; \quad \text{II, 1: } \rho > \varepsilon > \eta; \quad \text{II, 2: } \eta > \varepsilon.$$

Weil, den Voraussetzungen gemäß, das Inversionszentrum innerhalb der Primärellipse liegen soll, gilt jedenfalls:

$$\rho > \eta.$$

Im Falle I ist die Ladung  $q$  innerhalb der Kurve  $C$  gelegen. Der Bildpunkt  $q'$  muß dann außerhalb der Primärellipse fallen. Der Fall II, wo  $q$  außerhalb  $C$  liegt, zerfällt in zwei Teilfälle: im Falle II, 1 fällt der Bildpunkt  $q'$  innerhalb der Primärellipse aber außerhalb der Ellipse, die durch das Inversionszentrum geht; im Falle II, 2 liegt  $q'$  auch innerhalb der letzten Ellipse.

Aus der Figur ist zu ersehen, daß der Fall II, 1 oder II, 2 eintritt, je nach dem die Ladung  $q$  und die Kurve  $C$  an derselben Seite der nach dem Unendlichen hinauslaufenden Bild-

kurve  $C^*$  der genannten Ellipse durch den Ursprung liegen, oder das Entgegengesetzte der Fall ist.

Beiläufig sei bemerkt, daß die Randkurve  $C$  sich der Grenzkurve  $C^*$  immer näher anschmiegt, wenn  $\varrho$  näher an  $\eta$  rückt. Wenn die Primärellipse wächst und deren Form also immer kreisähnlicher wird, zieht sich die Randkurve  $C$  allmählich wie ein kleiner Kreis um den Ursprung zusammen. Wenn aber im entgegengesetzten Extremfall die Primärellipse immer mehr in die Strecke zwischen den Brennpunkten übergeht, umschließt die Randkurve  $C$  (die jetzt das Inversionszentrum nicht mehr enthält) immer dichter das Bild dieser Strecke darstellende Kreisbogenstück.

Beim elektrostatischen Problem brauchen wir die Reihe für  $\Theta_{\sigma\varrho}$ . Mit Verwendung des Entwicklungssatzes (41) findet man:

$$(42) \quad -\Theta_{\sigma\varrho} = K + A \cdot \sigma + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} (-A_{\nu} \cdot \cos \nu \sigma + B_{\nu} \cdot \sin \nu \sigma).$$

Hier bezeichnet  $K$  ein von  $\sigma$  unabhängiges Glied (das von Fall zu Fall wechselt). Für  $A$  und  $A_{\nu}$ ,  $B_{\nu}$  gelten die Ausdrücke:

Fall I:

$$(42a) \quad \begin{cases} A = 1, \\ A_{\nu} = 2 \cdot (e^{-\nu\epsilon} \cdot \operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta + e^{-\nu\epsilon} \cdot \operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \sin \nu \omega), \\ B_{\nu} = 2 \cdot (e^{-\nu\epsilon} \cdot \operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta + e^{-\nu\epsilon} \cdot \operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \cos \nu \omega). \end{cases}$$

Fall II, 1 und 2:

$$(42b) \quad \begin{cases} A = 0, \\ A_{\nu} = 2 \cdot e^{-\nu\epsilon} (\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta - \operatorname{sh} \nu \epsilon \cdot \sin \nu \omega), \\ B_{\nu} = 2 \cdot e^{-\nu\epsilon} (\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta - \operatorname{ch} \nu \epsilon \cdot \cos \nu \omega). \end{cases}$$

Beim elektrostatischen Problem haben wir deshalb nach (34) folgende Formeln für  $H(\sigma)$ :

Fall I:

$$(43a) \quad \left\{ H(\sigma) = \frac{e^{-2\kappa}}{\pi} \cdot \frac{2q}{k_1} \left[ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_{\nu} \cdot \sin \nu \sigma + B_{\nu} \cdot \cos \nu \sigma) \right] \right\}.$$

Fall II, 1 und 2:

$$(43b) \quad \left\{ H(\sigma) = \frac{e^{-2\kappa}}{\pi} \cdot \frac{2q}{k_2} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_{\nu} \cdot \sin \nu \sigma + B_{\nu} \cdot \cos \nu \sigma) \right\}.$$

Anstatt  $\lambda$  ist dabei  $\kappa$  gemäß der Definitionsformel (31) benutzt.

Mittels der gefundenen Ausdrücke für  $H(\sigma)$  und des Ausdrucks (32a) für die Resolvente läßt sich nun die Funktion  $\Psi(\tau)$  nach (28a) einfach berechnen. Man findet dabei:

Fall I:

$$(44a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(\tau) &= \frac{2q}{k_1} \cdot \frac{e^{-\kappa}}{\pi} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{2 \cdot \operatorname{ch} \kappa} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} [\operatorname{tgh} \kappa \cdot \operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta \right. \\ &\quad \left. + e^{-\nu(\varepsilon - \varrho)} \cdot \operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \sin \nu \omega] \cdot \sin \nu \tau \right. \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} [\operatorname{tgh} \kappa \cdot \operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta \\ &\quad \left. + e^{-\nu(\varepsilon - \varrho)} \cdot \operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \cos \nu \omega] \cdot \cos \nu \tau \right\}. \end{aligned} \right.$$

Fall II, 1 und 2:

$$(44b) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(\tau) &= \frac{2q}{k_2} \cdot \frac{e^{-\kappa}}{\pi} \\ &\cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} \cdot (\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta - \operatorname{sh} \nu \varepsilon \cdot \sin \nu \omega) \cdot \sin \nu \tau \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} \cdot (\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta - \operatorname{ch} \nu \varepsilon \cdot \cos \nu \omega) \cdot \cos \nu \tau \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Konvergenz dieser Reihen wird leicht nachgeprüft. Die induzierte Totalmasse  $m_i$  wird im zweiten Fall gleich Null und im ersten:

$$m_i = - \int_0^{2\pi} \Psi(\tau) \cdot d\tau = - \frac{2q}{k_1} \cdot \frac{e^{-\kappa}}{\operatorname{ch} \kappa}. \quad (45)$$

Führt man hier:

$$e^{-2\kappa} = \lambda = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$$

ein, findet man:

$$m_i = - \frac{2q}{k_1} \left( 1 - \frac{k_1}{k_2} \right)$$

in Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie [Formel (21)].

(31)

Aus-  
 $\psi(\tau)$

n  $\nu \zeta$

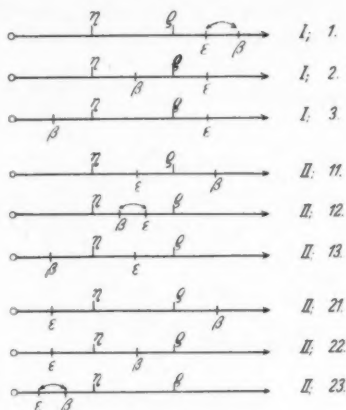
$\tau$

$\nu \tau$

füßt.  
sich

1)].

Nun wollen wir zu der viel lästigeren Berechnung vom Potential  $V(p, q)$  übergehen. Aus Konvergenzgründen müssen wir offenbar je nach den Lagen von  $p$  und  $q$  verschiedene Ausdrücke für  $V(p, q)$  erhalten. Neun Fälle müssen dabei untersucht werden; diese sind in nachfolgender Figur schematisch dargestellt.



$\curvearrowright$  gibt an, dass  $\varepsilon \approx \beta$  sein mag.

Fig. 4. Schematische Darstellung der geometrischen Verhältnisse zur Berechnung von  $V(p, q)$

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes (41) bekommt man folgenden Ausdruck für  $\log \frac{1}{r_{\tau p}}$ :

$$(45) \quad \log \frac{1}{r_{\tau p}} = K + \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_{\nu} \cdot \cos \nu \tau + B_{\nu} \cdot \sin \nu \tau).$$

Die Koeffizienten haben in den verschiedenen Fällen folgende Zusammensetzung:

Fall I, 1; II, 11 und 21:

$$(45a) \quad \begin{cases} A_{\nu} = -\frac{2}{\nu} (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta - e^{-\nu \beta} \cdot \operatorname{ch} \nu \rho \cdot \cos \nu \alpha), \\ B_{\nu} = -\frac{2}{\nu} (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta - e^{-\nu \beta} \cdot \operatorname{sh} \nu \rho \cdot \sin \nu \alpha). \end{cases}$$

Fall I, 2 und 3; II, 12, 22, 13 und 23:

$$(45b) \quad \begin{cases} A_\nu = -\frac{2}{\nu} \cdot e^{-\nu \epsilon} (\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta - \operatorname{ch} \nu \beta \cdot \cos \nu \alpha), \\ B_\nu = -\frac{2}{\nu} \cdot e^{-\nu \epsilon} (\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta - \operatorname{sh} \nu \beta \cdot \sin \nu \alpha). \end{cases}$$

Der Wert des von  $\tau$  unabhängigen Gliedes in (45) wird infolge der Form von  $\Psi(\tau)$  nur im Falle I von Bedeutung. Man findet:

Fall I, 1:

$$(45c) \quad \begin{cases} K = \log \frac{c}{2} + \varrho - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu \beta}}{\nu} \\ \quad \cdot (\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \alpha \cdot \cos \nu \zeta + \operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \alpha \cdot \sin \nu \zeta). \end{cases} \quad (46a)$$

Fall I, 2:

$$(45d) \quad \begin{cases} K = \log \frac{c}{2} + \beta - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu \beta}}{\nu} \\ \quad \cdot (\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \alpha \cdot \cos \nu \zeta + \operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \alpha \cdot \sin \nu \zeta). \end{cases}$$

Fall I, 3:

$$(45e) \quad \begin{cases} K = \log \frac{c}{2} + \eta - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu \eta}}{\nu} \\ \quad \cdot (\operatorname{ch} \nu \beta \cdot \cos \nu \alpha \cdot \cos \nu \zeta + \operatorname{sh} \nu \beta \cdot \sin \nu \alpha \cdot \sin \nu \zeta). \end{cases}$$

Nachdem wir jetzt die gleichförmig konvergenten Fourierschen Entwicklungen für  $\Psi(\tau)$  und  $\log \frac{1}{r^{x,p}}$  gefunden haben, ist es eine einfache Sache, das Potential  $V(p, q)$  nach (33a) zu berechnen. Die Rechnungen werden indessen etwas umständlich, und wir geben deshalb nur die Resultate wieder. Diese sind, wenn wir unter  $C$  eine praktisch bedeutungslose Konstante verstehen, die übrigens in sämtlichen Fällen mit dem Wert

$$C = \frac{2q}{k_2} e^{-\kappa} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \left[ \frac{\operatorname{ch}^2 \nu \eta \cdot \cos^2 \nu \zeta}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} + \frac{\operatorname{sh}^2 \nu \eta \cdot \sin^2 \nu \zeta}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} \right] \cdot e^{-\nu \epsilon}$$

ausfällt:



Fall I, 1:

$$\begin{aligned}
 (46a) \quad \left\{ \begin{aligned}
 V(p, q) &= C + \frac{2q}{k_1} e^{-\kappa} \left\{ -\frac{1}{\operatorname{ch} \kappa} \cdot \log \left( \frac{c}{2} \cdot e^e \right) \right. \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \cos \nu \omega + e^{-\nu \beta} \cdot \cos \nu \alpha) \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \sin \nu \omega + e^{-\nu \beta} \cdot \sin \nu \alpha) \\
 &- \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot e^{\nu \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \operatorname{sh} \nu \varrho}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot e^{-\nu (\varepsilon + \beta)} \cdot \cos \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \\
 &\left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot e^{\nu \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \operatorname{ch} \nu \varrho}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot e^{-\nu (\varepsilon + \beta)} \cdot \sin \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \right\}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Fall I, 2:

$$\begin{aligned}
 (46b) \quad \left\{ \begin{aligned}
 V(p, q) &= C + \frac{2q}{k_1} \cdot e^{-\kappa} \cdot \left\{ -\frac{1}{\operatorname{ch} \kappa} \cdot \log \left( \frac{c}{2} \cdot e^{\beta} \right) \right. \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \cos \nu \omega + e^{-\nu \beta} \cdot \cos \nu \alpha) \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \sin \nu \omega + e^{-\nu \beta} \cdot \sin \nu \alpha) \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \operatorname{tgh} \kappa \cdot \operatorname{sh} \nu (\varrho - \beta) \left[ \frac{\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \cos \nu \alpha \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \sin \nu \alpha \right] \\
 &- \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot e^{-\nu \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \operatorname{ch} \nu \beta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \cos \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \\
 &\left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot e^{-\nu \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \operatorname{sh} \nu \beta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \sin \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \right\}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Fall I, 3:

$$\begin{aligned}
 (46c) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & V(p, q) = C + \frac{2q}{k_1} \cdot e^{-\kappa} \left\{ -\frac{1}{\operatorname{ch} \kappa} \cdot \log \left( \frac{c}{24} \cdot e^{\eta} \right) \right. \\
 & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \omega \\
 & \quad \quad \quad + e^{-\nu \eta} \cdot \operatorname{ch} \nu \beta \cdot \cos \nu \alpha) \\
 & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \omega \\
 & \quad \quad \quad + e^{-\nu \eta} \cdot \operatorname{sh} \nu \beta \cdot \sin \nu \alpha) \\
 & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \operatorname{tgh} \kappa \cdot \operatorname{sh} \nu (\varrho - \eta) \left[ \frac{\operatorname{ch} \nu \beta \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \cos \nu \alpha \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. + \frac{\operatorname{sh} \nu \beta \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \sin \nu \alpha \right] \\
 & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot e^{-\nu \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \operatorname{ch} \nu \beta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \cos \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \\
 & \left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot e^{-\nu \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \operatorname{sh} \nu \beta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \sin \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \right\}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Fall II, 11 und 21:

$$\begin{aligned}
 (46d) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & V(p, q) = C + \frac{2q}{k_2} \cdot e^{-\kappa}. \\
 & \left\{ - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \operatorname{ch} \nu \varepsilon \cdot \cos \nu \omega \right. \\
 & \quad \quad \quad + e^{-\nu \beta} \cdot \operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \cos \nu \alpha) \\
 & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \operatorname{sh} \nu \varepsilon \cdot \sin \nu \omega \\
 & \quad \quad \quad + e^{-\nu \beta} \cdot \operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \sin \nu \alpha) \\
 & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu \varepsilon \cdot \operatorname{ch} \nu \varrho}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot e^{-\nu \beta} \cdot \cos \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \\
 & \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \nu \varrho}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot e^{-\nu \beta} \cdot \sin \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \right\}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Fall II, 12, 13, 22 und 23:

$$\begin{aligned}
 (46e) \quad \left\{ \begin{aligned} & V(p, q) = C + \frac{2q}{k_2} \cdot e^{-\pi} \cdot \\ & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot e^{-\nu e} (\operatorname{ch} \nu \varepsilon \cdot \cos \nu \omega \\ & \quad + \operatorname{ch} \nu \beta \cdot \cos \nu \alpha) \\ & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot e^{-\nu e} (\operatorname{sh} \nu \varepsilon \cdot \sin \nu \omega \\ & \quad + \operatorname{sh} \nu \beta \cdot \sin \nu \alpha) \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu \varepsilon \cdot \operatorname{ch} \nu \beta}{\operatorname{sh} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot e^{-\nu e} \cdot \cos \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \nu \beta}{\operatorname{ch} (\kappa + \nu \varrho)} \cdot e^{-\nu e} \cdot \sin \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

#### 4. Untersuchung der Greenschen Funktion in einigen Entartungsfällen

Wenn die Reihenentwicklung für  $\frac{2q}{k} \cdot \log \frac{1}{r_{qp}}$  zu dem oben abgeleiteten Potentialausdruck gefügt wird, erhält man mit  $q = 1$  die früher definierte Greensche Funktion  $G(p, q)$ . Wir wollen nun den Ausdruck für  $G(p, q)$  in den Fällen herleiten, wo das eine Medium leitend (das ist  $\varepsilon$  unendlich groß) ist.

Gemäß der Definition (31) ist:

$$(47) \quad e^{-2\kappa} = \lambda = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}.$$

$k_1$  und  $k_2$  sind positive Zahlen. Der reelle Parameter  $\lambda$  variiert folglich zwischen  $-1$  und  $+1$ . Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

1.  $k_1 < k_2$ , dann ist:  $\kappa = -\frac{1}{2} \cdot \log \lambda$ ,
2.  $k_2 < k_1$ , „ „  $\kappa = -\frac{1}{2} \cdot \log |\lambda| + i \cdot \frac{\pi}{2}$ .

Die trigonometrischen Entwicklungen für  $\log \frac{1}{r_{qp}}$  werden in derselben Weise wie die für  $\log \frac{1}{r_{\xi p}}$  erhalten. Auch hier beschränken wir uns auf die Angabe der Resultate.

## A. Innenmedium leitend

Dann ist:

$$k_1 = \infty, \quad \lambda = -1 \quad \text{und} \quad \kappa = i \cdot \frac{\pi}{2},$$

also:

$$\text{sh}(\kappa + \nu \varrho) = i \cdot \text{ch } \nu \varrho, \quad \text{ch}(\kappa + \nu \varrho) = i \cdot \text{sh } \nu \varrho$$

und wir bekommen:

Fall II, 12:

1.  $\beta > \varepsilon$

$$(48a) \quad \left\{ \begin{aligned} G(p, q) &= C_0 + \frac{2}{k_2} \left\{ \log \frac{c}{2} + \varepsilon \right. \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\text{ch } \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\text{ch } \nu \varrho} \cdot [\text{sh } \nu (\varepsilon - \varrho) \cdot \cos \nu \omega \\ &+ \text{sh } \nu (\beta - \varrho) \cdot \cos \nu \alpha] \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\text{sh } \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\text{sh } \nu \varrho} \cdot [\text{sh } \nu (\varepsilon - \varrho) \cdot \sin \nu \omega \\ &+ \text{sh } \nu (\beta - \varrho) \cdot \sin \nu \alpha] \\ &- \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \text{sh } \nu (\beta - \varrho) \left[ \frac{\text{ch } \nu \varepsilon}{\text{ch } \nu \varrho} \cdot \cos \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \right. \\ &\left. \left. + \frac{\text{sh } \nu \varepsilon}{\text{sh } \nu \varrho} \cdot \sin \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

2.  $\varepsilon > \beta$

Diesen Fall erhält man, wenn in (48a)  $\varepsilon$  mit  $\beta$  und  $\omega$  mit  $\alpha$  vertauscht wird.

Fall II, 22:

$$(48b) \quad \left\{ \begin{aligned} G(p, q) &= C_0 + \frac{2}{k_2} \cdot \left\{ \log \frac{c}{2} + \eta \right. \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\cos \nu \zeta}{\text{ch } \nu \varrho} \cdot [\text{ch } \nu \varepsilon \cdot \text{sh } \nu (\eta - \varrho) \cdot \cos \nu \omega \\ &+ \text{ch } \nu \eta \cdot \text{sh } \nu (\beta - \varrho) \cdot \cos \nu \alpha] \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\sin \nu \zeta}{\text{sh } \nu \varrho} [\text{sh } \nu \varepsilon \cdot \text{sh } \nu (\eta - \varrho) \cdot \sin \nu \omega \\ &+ \text{sh } \nu \eta \cdot \text{sh } \nu (\beta - \varrho) \cdot \sin \nu \alpha] \\ &- \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \text{sh } \nu (\beta - \varrho) \left[ \frac{\text{ch } \nu \varepsilon}{\text{ch } \nu \varrho} \cdot \cos \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \right. \\ &\left. \left. + \frac{\text{sh } \nu \varepsilon}{\text{sh } \nu \varrho} \cdot \sin \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Fall II, 13:

Dieser wird aus (48b) durch dieselbe Vertauschung wie oben erhalten.

Fall II, 23:

1.  $\beta > \varepsilon$ 

$$(48c) \quad \left\{ \begin{aligned} G(p, q) = & C_0 + \frac{2}{k_2} \cdot \left\{ \log \frac{c}{2} + 2\eta - \beta \right. \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\cos \nu \zeta}{\operatorname{ch} \nu \varrho} \cdot \operatorname{sh} \nu (\eta - \varrho) \cdot (\operatorname{ch} \nu \varepsilon \cdot \cos \nu \omega \\ & + \operatorname{ch} \nu \beta \cdot \cos \nu \alpha) \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \frac{\sin \nu \zeta}{\operatorname{sh} \nu \varrho} \cdot \operatorname{sh} \nu (\eta - \varrho) \cdot (\operatorname{sh} \nu \varepsilon \cdot \sin \nu \omega \\ & + \operatorname{sh} \nu \beta \cdot \sin \nu \alpha) \\ & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \operatorname{sh} \nu (\beta - \varrho) \cdot \left( \frac{\operatorname{ch} \nu \varepsilon}{\operatorname{ch} \nu \varrho} \cdot \cos \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \right. \\ & \left. \left. + \frac{\operatorname{sh} \nu \varepsilon}{\operatorname{sh} \nu \varrho} \cdot \sin \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

2.  $\varepsilon > \beta$ 

Man mache hierfür in (48c) wieder die erwähnte Vertauschung.

Die unwesentliche Konstante  $C_0$  fällt in sämtlichen Fällen mit dem Wert:

$$C_0 = -\frac{2}{k_2} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \left( \frac{\operatorname{ch}^2 \nu \eta \cdot \cos^2 \nu \zeta}{\operatorname{ch} \nu \varrho} + \frac{\operatorname{sh}^2 \nu \eta \cdot \sin^2 \nu \zeta}{\operatorname{sh} \nu \varrho} \right) \cdot e^{-\nu \varrho}$$

heraus.

## B. Außenmedium leitend

Nun wird  $k_2 = \infty$ ,  $\lambda = 1$ , also  $\varkappa = 0$ , und man findet:

Fall I, 1:

1.  $\beta > \varepsilon$ 

$$(48d) \quad \left\{ \begin{aligned} G(p, q) = & \frac{2}{k_1} \cdot \left[ \varepsilon - \varrho + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot e^{-\nu(\beta - \varrho)} \right. \\ & \left. \cdot \operatorname{sh} \nu (\varepsilon - \varrho) \cdot \cos \nu (\omega - \alpha) \right]. \end{aligned} \right.$$

2.  $\varepsilon > \beta$ 

Man vertausche hierfür  $\varepsilon$  und  $\beta$  bzw.  $\omega$  und  $\alpha$  in der vorhergehenden Formel (48 d).

Aus den Ausdrücken ist leicht zu ersehen, daß das Potential einen konstanten Wert annimmt, wenn  $\beta \rightarrow \rho$ , d. h. der Punkt  $p$  an die Randkurve  $C$  rückt; dieser Wert wird im letzten Falle gleich Null.

## 5. Nähere Untersuchung des elektromagnetischen Problems

In die Formel (28 a) für die Dichte des induzierten Magnetismus soll jetzt der folgende aus (18) und (29) erhaltene Ausdruck für  $H(\tau)$  eingeführt werden:

$$(49) \quad H(\tau) = 2j \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \log \frac{1}{r_{\sigma j}} \right).$$

Gemäß vorher beschriebenen Methoden findet man für  $\log \frac{1}{r_{\sigma j}}$  die Darstellung:

$$(50) \quad \log \frac{1}{r_{\sigma j}} = K + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} (-A_{\nu} \cdot \cos \nu \sigma + B_{\nu} \cdot \sin \nu \sigma).$$

$K$  ist ein von  $\sigma$  unabhängiges Glied. Für  $A_{\nu}$  und  $B_{\nu}$  gelten die Ausdrücke:

Fall I:

$\varepsilon > \rho$  (Stromfaden innerhalb  $C$ )

$$(51a) \quad \begin{cases} A_{\nu} = 2 \cdot (e^{-\nu \varepsilon} \cdot \operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta - e^{-\nu \varepsilon} \cdot \operatorname{ch} \nu \rho \cdot \cos \nu \omega), \\ B_{\nu} = 2 (-e^{-\nu \varepsilon} \cdot \operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta + e^{-\nu \varepsilon} \cdot \operatorname{sh} \nu \rho \cdot \sin \nu \omega). \end{cases}$$

Fall II:

$\varepsilon < \rho$  (Stromfaden außerhalb  $C$ )

$$(51b) \quad \begin{cases} A_{\nu} = 2 \cdot e^{-\nu \varepsilon} (\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta - \operatorname{ch} \nu \varepsilon \cdot \cos \nu \omega), \\ B_{\nu} = 2 \cdot e^{-\nu \varepsilon} (-\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta + \operatorname{sh} \nu \varepsilon \cdot \sin \nu \omega). \end{cases}$$

Beim elektromagnetischen Problem erhält demnach  $H(\sigma)$  in sämtlichen Fällen die Form:

$$(52) \quad H(\sigma) = \frac{e^{-2\varepsilon}}{\pi} \cdot 2j \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_{\nu} \cdot \sin \nu \sigma + B_{\nu} \cdot \cos \nu \sigma).$$

Für die Dichtefunktion  $\Psi(\tau)$  findet man folgende Ausdrücke:

Fall I:

$$(53a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(\tau) &= 2j \cdot \frac{e^{-\kappa}}{\pi} \\ &\cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} [\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta - e^{-\nu(\varepsilon - \varrho)} \cdot \operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \cos \nu \omega] \cdot \sin \nu \tau \right. \\ &\left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} [-\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta + e^{-\nu(\varepsilon - \varrho)} \cdot \operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \sin \nu \omega] \cdot \cos \nu \tau \right\}. \end{aligned} \right.$$

Fall II:

$$(53b) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(\tau) &= 2j \cdot \frac{e^{-\kappa}}{\pi} \\ &\cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} \cdot (\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta - \operatorname{ch} \nu \varepsilon \cdot \cos \nu \omega) \cdot \sin \nu \tau \right. \\ &\left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} \cdot (-\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta + \operatorname{sh} \nu \varepsilon \cdot \sin \nu \omega) \cdot \cos \nu \tau \right\}. \end{aligned} \right.$$

Das Potential  $V(p, j)$  des induzierten Magnetismus wird analog mit  $V(p, q)$  berechnet. Mit der Bezeichnung:

$$C_1 = -2j \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \cdot e^{-2(\kappa + \nu \varrho)} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2\nu \eta \cdot \sin 2\nu \zeta}{\operatorname{sh} 2(\kappa + \nu \varrho)}.$$

bekommt man dabei die Resultate:

Fall I, 1:

$$(54a) \quad \left\{ \begin{aligned} V(p, j) &= C_1 + 2j \cdot e^{-\kappa} \\ &\cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \operatorname{sh} \nu \eta \cdot \operatorname{ch} \nu \varrho \cdot \sin \nu \zeta \right. \\ &\quad \cdot \left[ -\frac{e^{-\nu \varepsilon} \cdot \cos \nu \omega}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} + \frac{e^{-\nu \beta} \cdot \cos \nu \alpha}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} \right] \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \operatorname{ch} \nu \eta \cdot \operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \cos \nu \zeta \\ &\quad \cdot \left[ \frac{e^{-\nu \varepsilon} \cdot \sin \nu \omega}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} - \frac{e^{-\nu \beta} \cdot \sin \nu \alpha}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} \right] \\ &- \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu(\varepsilon + \beta - \varrho)} \cdot \operatorname{sh} \nu \varrho \cdot \operatorname{ch} \nu \varrho \\ &\quad \cdot \left[ \frac{\sin \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} - \frac{\cos \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \right.$$



Fall I, 2 und 3:

$$\begin{aligned}
 V(p, j) &= C_1 + 2j \cdot e^{-\kappa} \\
 (54b) \quad &\left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu \varepsilon} \cdot \left[ \frac{\text{ch } \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\text{sh } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \text{sh } \nu \varrho \cdot \sin \nu \omega \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\text{sh } \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\text{ch } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \text{ch } \nu \varrho \cdot \cos \nu \omega \right] \right. \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu \varrho} \cdot \left[ \frac{\text{sh } \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\text{sh } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \text{ch } \nu \beta \cdot \cos \nu \alpha \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\text{ch } \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\text{ch } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \text{sh } \nu \beta \cdot \sin \nu \alpha \right] \\
 &- \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu \varepsilon} \cdot \left[ \frac{\text{ch } \nu \beta \cdot \text{sh } \nu \varrho}{\text{sh } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \sin \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\text{sh } \nu \beta \cdot \text{ch } \nu \varrho}{\text{ch } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \cos \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \right] \Bigg\}.
 \end{aligned}$$

Fall II, 11 und 21:

$$\begin{aligned}
 V(p, j) &= C_1 + 2j \cdot e^{-\kappa} \\
 (54c) \quad &\left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu \varepsilon} \cdot \left[ \frac{\text{ch } \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\text{sh } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \text{sh } \nu \varepsilon \cdot \sin \nu \omega \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\text{sh } \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\text{ch } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \text{ch } \nu \varepsilon \cdot \cos \nu \omega \right] \right. \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu \beta} \cdot \left[ \frac{\text{sh } \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\text{sh } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \text{ch } \nu \varrho \cdot \cos \nu \alpha \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\text{ch } \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\text{ch } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \text{sh } \nu \varrho \cdot \sin \nu \alpha \right] \\
 &- \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu \beta} \cdot \left[ \frac{\text{sh } \nu \varepsilon \cdot \text{ch } \nu \varrho}{\text{sh } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \sin \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\text{ch } \nu \varepsilon \cdot \text{sh } \nu \varrho}{\text{ch } (\kappa + \nu \varrho)} \cdot \cos \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \right] \Bigg\}.
 \end{aligned}$$

Fall II, 12, 13, 22 und 23:

$$\begin{aligned}
 V(p, j) = & C_1 + 2j \cdot e^{-\kappa} \\
 & \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu \varrho} \left[ \frac{\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} \cdot \operatorname{sh} \nu \varepsilon \cdot \sin \nu \omega \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} \cdot \operatorname{ch} \nu \varepsilon \cdot \cos \nu \omega \right] \right. \\
 (54d) \quad & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu \varrho} \left[ \frac{\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} \cdot \operatorname{ch} \nu \beta \cdot \cos \nu \alpha \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} \cdot \operatorname{sh} \nu \beta \cdot \sin \nu \alpha \right] \\
 & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu \varrho} \left[ \frac{\operatorname{sh} \nu \varepsilon \cdot \operatorname{ch} \nu \beta}{\operatorname{sh}(\kappa + \nu \varrho)} \cdot \sin \nu \omega \cdot \cos \nu \alpha \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\operatorname{ch} \nu \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \nu \beta}{\operatorname{ch}(\kappa + \nu \varrho)} \cdot \cos \nu \omega \cdot \sin \nu \alpha \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

#### 6. Berechnung der Eigenladungsverteilung und des Eigenpotentials bei einer leitenden Zylinderfläche

Wir wollen einen geraden, zylindrischen Leiter mit der Spurkurve  $C$  und einer Eigenladung  $q$  (je Längeneinheit) ins Auge fassen. Die Integralgleichung der Ladungsdichte  $\psi(t)$  geht aus (7) hervor, wenn man  $h(t) = 0$  und  $\lambda = -1$  setzt. Die dabei entstehende homogene Gleichung:

$$(55) \quad \psi(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, t) \cdot \psi(s) ds = 0$$

muß offenbar eine Lösung haben, weil nach dem Vorhergehenden  $\lambda = -1$  ein Pol der Resolvente ist. Diese kann folglich auf die Form:

$$g(s, t; \lambda) = \frac{u(s, t)}{1 + \lambda} + G(\lambda)$$

gebracht werden, wo  $G(\lambda)$  eine in der Umgebung von  $\lambda = -1$  reguläre Funktion bedeutet, und

$$(56) \quad u(s, t) = \lim_{\lambda \rightarrow -1} [(1 + \lambda) g(s, t; \lambda)].$$

Nach einem bekannten Satze der Integralgleichungstheorie stellt  $u(s, t)$  für jeden Wert von  $s$  im Integrationsgebiete eine Lösung der homogenen Gl. (55) dar. Führt man in (56) die

Potenzreihenentwicklung für  $g(s, t; \lambda)$  ein, ergibt sich folgende Form für die Lösung:

$$(57) \quad \psi(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \{f_r(s, t)\}.$$

Im hier vorliegenden Falle kennen wir bereits die Partialbruchzerlegung für die Resolvente, und die Formel (56) gibt uns deshalb unmittelbar eine Lösung von (55). Wenn wir in (32a)  $\kappa = i \cdot \frac{\pi}{2}$  setzen (man bemerke, daß  $\frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\kappa}}{\operatorname{ch} \kappa}$  ist), bekommen wir aus der ersten, von  $\sigma$  unabhängigen Gliedergruppe den gesuchten Ausdruck für  $\Psi(\tau)$ :

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(\tau) = & -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \nu \eta}{\operatorname{ch} \nu \varrho} \cdot \cos \nu \zeta \cdot \cos \nu \tau \right. \\ & \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \nu \eta}{\operatorname{sh} \nu \varrho} \cdot \sin \nu \zeta \cdot \sin \nu \tau \right\}. \end{aligned} \right.$$

Offenbar kann jede Lösung der homogenen Gleichung mit einem willkürlichen Zahlenfaktor versehen werden. Die doppelte freie Ladung pro Längeneinheit wird nach (59):

$$2 \oint_C \varepsilon(t) \cdot db_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \cdot dt = - \int_0^{2\pi} \Psi(\tau) \cdot d\tau = 1.$$

Der physikalische Wert soll aber  $2q/k_2$  sein. Um den richtigen Wert der Ladungsdichte zu erhalten, haben wir also die Formel (59) rechter Hand mit  $2q/k_2$  zu multiplizieren.

Das Potential  $V(p)$  eines Punktes mit den elliptischen Koordinaten  $(\alpha, \beta)$  wird gemäß (33a) und vorher benutzten Entwicklungen für  $\log \frac{1}{r_{\tau p}}$  berechnet. Man erhält dabei, je nach dem  $\beta \geq \eta$  ist, die folgenden Resultate:

Fall 1:  $\beta > \eta$

$$(60a) \quad \left\{ \begin{aligned} V(p) = & C_2 + \frac{2q}{k_2} \cdot \left\{ \log \frac{c}{2} + \beta \right. \\ & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \operatorname{sh} \nu (\varrho - \beta) \left[ \frac{\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{ch} \nu \varrho} \cdot \cos \nu \alpha \right. \\ & \left. \left. + \frac{\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{sh} \nu \varrho} \cdot \sin \nu \alpha \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Fall 2:  $\beta < \eta$ 

$$(60b) \quad \left\{ \begin{aligned} V(p) = & C_2 + \frac{2q}{k_2} \cdot \left\{ \log \frac{c}{2} + \eta \right. \\ & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \operatorname{sh} \nu (\varrho - \eta) \left[ \frac{\operatorname{ch} \nu \beta \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{ch} \nu \varrho} \cdot \cos \nu \alpha \right. \\ & \left. \left. + \frac{\operatorname{sh} \nu \beta \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{sh} \nu \varrho} \cdot \sin \nu \alpha \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wir haben dabei mit  $C_2$  den Ausdruck:

$$C_2 = -\frac{2q}{k_2} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} e^{-\nu \varrho} \left( \frac{\operatorname{ch}^2 \nu \eta \cdot \cos^2 \nu \zeta}{\operatorname{ch} \nu \varrho} + \frac{\operatorname{sh}^2 \nu \eta \cdot \sin^2 \nu \zeta}{\operatorname{sh} \nu \varrho} \right).$$

bezeichnet.

Mit  $\beta = \varrho$  im Fall 1 erhält man den von  $\alpha$  unabhängigen Wert  $V_0$  des konstanten Leiterpotentials. Da man zu einer Potentialfunktion immer eine beliebige Konstante hinzufügen kann, ist der Wert  $V_0$  nicht von unmittelbar praktischem Interesse. Dies ist dagegen der Fall mit der Differenz:  $\Delta V = V_0 - V(p)$ , die die Spannung zwischen dem Leiter und einem willkürlichen Punkt darstellt. Man findet dafür den Ausdruck:

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta V(p) = & \frac{2q}{k_2} \cdot \left\{ \varrho - \beta \right. \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} \cdot \operatorname{sh} \nu (\varrho - \beta) \left( \frac{\operatorname{ch} \nu \eta \cdot \cos \nu \zeta}{\operatorname{ch} \nu \varrho} \cdot \cos \nu \alpha \right. \\ & \left. \left. + \frac{\operatorname{sh} \nu \eta \cdot \sin \nu \zeta}{\operatorname{sh} \nu \varrho} \cdot \sin \nu \alpha \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die eben gewonnenen Potentialformeln können auch als Grenzfälle der in Abschnitt 4, Litt. A eingeführten Greenschen Funktion erhalten werden. Mithin bekommt man (60a) und (60b) mit  $q = 1$  wieder, wenn man in den dort erwähnten Fällen II, 12 Nr. 2 und II, 13  $\varepsilon = \varrho$  setzt; dies bedeutet physikalisch, daß die Linienladung  $q$  an die leitende Zylinderfläche rückt.

#### 7. Berechnung der Feldvektoren

Die rechtwinkligen Koordinaten  $(x, y)$  des Punktes  $p$ , wo die Feldstärken berechnet werden sollen, sind gewisse Funktionen der elliptischen Koordinaten  $(\alpha, \beta)$ , die durch die Transformationsformel:

$$(62) \quad x + iy = \frac{l}{\cos(\zeta - i\eta) - \cos(\alpha - i\beta)}$$

definiert werden. Hier bezeichnet  $l$  eine Länge, die durch die Forderung bestimmt wird, daß für  $\beta = \varrho$  der Punkt  $p$  auf die gegebene Randkurve  $C$  fallen soll. Mit den Bezeichnungen:

$$(63) \quad \begin{cases} u = \cos \zeta \cdot \operatorname{ch} \eta - \cos \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta \\ v = \sin \zeta \cdot \operatorname{sh} \eta - \sin \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta \end{cases}$$

wird nach (62):

$$(64) \quad x = l \cdot \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -l \cdot \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Durch jeden Punkt  $x(\alpha, \beta)$ ,  $y(\alpha, \beta)$  gehen zwei orthogonale Kurven  $s_1$  und  $s_2$ , die den Fällen  $\beta = \text{const}$  bzw.  $\alpha = \text{const}$  entsprechen. Nennen wir die Bogenlängen  $b_1$  bzw.  $b_2$ , haben wir:

$$(65) \quad \begin{cases} db_1 = + \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2} \cdot d\alpha, \\ db_2 = + \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2} \cdot d\beta. \end{cases}$$

Die Komponenten der Feldstärken in den Richtungen  $s_1$  und  $s_2$  werden:

$$(66) \quad E_{s_1} = - \frac{dV}{db_1} = - \frac{\partial V}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{db_1}, \quad E_{s_2} = - \frac{dV}{db_2} = - \frac{\partial V}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{db_2}.$$

Aus (64) erhält man die Ausdrücke:

$$(67) \quad \frac{d\alpha}{db_1} = \frac{1}{l} \cdot \frac{u^2 + v^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2}}, \quad \frac{d\beta}{db_2} = \frac{1}{l} \cdot \frac{u^2 + v^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2}}.$$

oder, wenn elliptische Koordinaten gemäß (63) eingeführt werden:

$$(68) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{db_1} = \frac{d\beta}{db_2} = M(\alpha, \beta) \\ = \frac{1}{l} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \eta \cdot \cos \zeta - \operatorname{ch} \beta \cdot \cos \alpha)^2 + (\operatorname{sh} \eta \cdot \sin \zeta - \operatorname{sh} \beta \cdot \sin \alpha)^2}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \beta \cdot \sin^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha}}. \end{cases}$$

Also wird:

$$(69) \quad E_{s_1} = -M \cdot \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \quad E_{s_2} = -M \cdot \frac{\partial V}{\partial \beta}.$$

Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$  und  $\frac{\partial V}{\partial \beta}$  erhält man durch gliedweise Derivation der oben hergeleiteten Potentialausdrücke. Hinsichtlich der gleichmäßigen Konvergenz aller Gliedergruppen muß dabei unter Umständen die Kurve  $C^*$  (d. h.  $\beta = \eta$ ) nebst einer kleinen Umgebung ausgeschlossen werden.

Stockholm, Stockholms Högskola, Institut för Mekanik och Matematisk Fysik.

(Eingegangen 27. August 1934)

urch  
auf  
gen:

onale  
ent-  
wir:

n  $s_1$

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}$

den:

$y^3$

urch  
cke.  
pen  
ebst

anik

V  
2  
1

1  
9  
3  
4

XU

G  
L

Von

„Da  
gan-  
Lehr-  
gan-  
and  
sind  
Bild  
Tat  
ein-  
mitt

Fr

L



GRIMSEHL-TOMASCHEK

# Lehrbuch der Physik

zum Gebrauch beim Unterricht, neben  
akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium

*Vor kurzem erschien der das Werk abschließende Band II, Teil 2*

## Materie und Äther

6., vollständig Neubearb. Aufl. 313 Abb. Geb. RM 14.—

Hauptabschnitte des Inhalts: I. Der elektrische Aufbau der Materie / II. Die Kerne / III. Licht und Materie / IV. Welle und Korpuskel / V. Spektrallinien und Atombau der Mehrelektronensysteme / VI. Molekülbau / VII. Der Bau der zusammenhängenden Materie / VIII. Elektrodynamik bewegter Medien / IX. Materie und Energie im Weltraum.

Dieser Band bietet in gewissem Sinne eine abgeschlossene Darstellung der neuesten Entwicklung der Physik. Er behandelt alle diejenigen Erscheinungen, die auf eine quantenhafte Struktur der Elektrizität und der Energie zurückgehen, die also die Atomphysik berühren.

„Daß jeder Hochschullehrer diesen Band seinen Studenten empfehlen wird, ist ganz selbstverständlich. Denn es gibt da keine Auswahl. Die zahlreichen kleineren Lehrbücher der Physik bringen die Forschungsergebnisse der letzten 30 Jahre in ganz unzulänglicher Weise und können dies auch aus Raummangel gar nicht anders. Die sogenannten populären Darstellungen, die ja zum Teil vorzüglich sind, können aber dem Studenten ebensowenig helfen, denn sie geben nur ein Bild der entwickelten Vorstellungen, ohne den Unterbau durch das eigentliche Tatsachenmaterial hinreichend auszuführen. Hier ist nun zum erstenmal eine einführende Gesamtdarstellung gegeben, die dem Studierenden ein Wissen vermittelt, das durch Schulung wirklich zum Können ausgebildet werden kann.“

Prof. Diesselhorst, Techn. Hochschule Braunschweig, 31. 10. 34.)

### Früher erschienen:

I. Band: Mechanik, Wärmelehre, Akustik.

8. Auflage. Mit 706 Abbildungen ..... Geb. RM 19.80

II. Band: Teil 1: Elektromagnetisches Feld. Optik.

6. Auflage. Mit 1162 Abbildungen, 1 Titelbild und 1 farbigen  
Tafel ..... Geb. RM 26.—

Durch alle Buchhandlungen zu beziehen

LEIPZIG / B. G. TEUBNER / BERLIN



## STABILISATOR

mit einer Stromquelle beliebiger Art gibt eine Spannungskonstanz:  
 $\pm 0,1\%$  bei  $\pm 10\%$  Primärschwankungen,  $1-2\%$  zwischen Leerlauf  
 und Vollast.  $0,02\%$  ist nur die gegenseitige Beeinflussung der Teil-  
 spannungen. Trägheitslose Regelung durch Glühmentladung. Eigen-  
 verbrauch: Einige Milliampere.

Ausführliche Beschreibungen kostenlos.

**STABILOVOLT G. m. b. H., Berlin-Tempelhof, Lorenzweg 1. Tel. Südring 7630**



## Die chemische Emissionsspektralanalyse

### I. Teil: Grundlagen und Methoden

Von Prof. Dr. **Walther Gerlach**, München, und Dipl.-Ing. Dr.  
**E. Schweitzer**, Frankfurt a.M. VI, 120 Seiten mit 53 Figuren im Text.  
 1930. gr. 8°. V Kart. RM. 11,34

**Zeitschrift für physikalische Chemie:** Das Buch ist flüssig und leichtverständlich geschrieben und enthält eingehende Angaben über die zur Ausführung der Spektralanalyse erforderlichen Apparate, den Gang der Untersuchung, die dabei gemachten praktischen Laboratoriumserfahrungen usw. Inhalt wie Ausstattung lassen nichts zu wünschen übrig. Das Buch kann daher warm empfohlen werden. Riesenfeld.

### II. Teil: Anwendung in Medizin, Chemie und Mineralogie

Von Prof. Dr. **Walther Gerlach**, München, und Prof. Dr. **Werner Gerlach**, Basel. VIII, 191 Seiten mit 73 Figuren im Text. 1933.  
 gr. 8°. V Kart. RM. 13.—

**Zeitschrift für angewandte Chemie:** Das Buch birgt eine außerordentliche Fülle von Erfahrungen, an denen niemand vorübergehen kann, der die Spektralanalyse, sei es im wissenschaftlichen Laboratorium, sei es im Betrieb, verwendet.

## Grenzen der elektrischen Messung

**nebst Nachbargebieten.** Vorträge auf dem 9. Deutschen Physiker- und Mathematikertag in Würzburg 1933, gehalten von M. v. Ardenne, H.-J. v. Braunmühl, E. Brüche, L. Cremer, M. Czerny, H. Ewest, R. Feldtkeller, E. Franz, H. Hoyer, G. Jäckel, W. Janovsky, H. Johansson, L. Kettenacker, R. Köhler, J. Kröner, K. Küpfmüller, E. Meyer, H. Plendl, L. Pungs, A. Ramspeck, L. Rhode, H. Rieche, O. Scherzer, G. Stein, R. Tamm, F. Trendelenburg, R. Vieweg, O. Wieland auf Veranlassung der **Deutschen Physikal. Gesellschaft, der Deutschen Gesellschaft für technische Physik und der Heinrich-Hertz-Gesellschaft zur Förderung des Funkwesens.** Zusammengestellt von **W. Hort** und **F. Moench.**

(Bildet mit einem Vortrag von Joh. Stark „Über die Organisation der Physikalischen Forschung“ einen Sonderdruck aus der Zeitschrift für technische Physik 1933, Nr. 11)

90 Seiten mit 179 Abbildungen im Text und auf 5 Tafeln, sowie  
 1 Tafel mit 12 Filmstreifen. 1933. 4°. RM. 6.—

**Aus dem Verzeichnis der Vortragenden geht hervor, daß Grundlegendes zu den Problemen mitgeteilt worden ist. Durch die Sonderausgabe ist auch denen, die die Z. f. techn. Phys. nicht regelmäßig beziehen, Gelegenheit gegeben, die Vorträge zu erwerben.**

Das mit **V** bezeichnete Werk erschien in der Verlagsabteilung Leopold Voss

## JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Verantwortlich für die Redaktion: Prof. Dr. E. Grünelsen, Marburg/L. - Verantwortlich für Anzeigen: Bernhard v. Ammon, Leipzig. - Anzeigenannahme: Leipzig C1, Salomonstr. 18 B, Tel. 708 61. - Verlag: Johann Ambrosius Barth. - Druck: Metzger & Wittig, Leipzig C1. - DA. 1100 III. Vj. 1934. - Printed in Germany.